

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИКИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

В. А. ТАРТАКОВСКИЙ, И. Г. ВИНТИЗЕНКО

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

В данной работе рассматривается применение разложения в ряд по собственным функциям для решения на АВМ дифференциальных уравнений в частных производных, отвечающих пространственно-временной динамике ядерного реактора.

Сущность рассматриваемого метода в том, что искомую функцию представляют бесконечным рядом по собственным функциям пространственного оператора исходной задачи. Временную зависимость содержат в себе коэффициенты ряда — моды.

1. Рассмотрим ядерный реактор, представляющий собой цилиндр с экстраполированными высотой H и радиусом R . В этом цилиндре находятся топливо, замедлитель и управляющие стержни. Охлаждение, достаточное для компенсации радиальных и азимутальных неравноностей температурного поля, осуществляется газом, циркулирующим снизу вверх по каналам, параллельным вертикальной оси (оси z) цилиндра. Влияние замедлителя на тепловые процессы в системе предполагается незначительным. Диффузией тепла в топливе и теплоносителе пренебрегаем.

Стационарное состояние подобного реактора в одnogрупповом диффузионном приближении описывается уравнениями.

$$M^2 \nabla^2 \Phi_c(r, \theta, z) + B_c^2 \Phi_c(r, \theta, z) = 0; \quad (1)$$

$$\mu U \bar{\Phi}_c(z) - \gamma_{\text{иг}} F_{\text{и}} [T_{\text{и}}(z) - T_{\text{г}}(z)] = 0; \quad (2)$$

$$C_{\text{г}} M_{\text{г}} v_{\text{г}} \frac{dT_{\text{г}}(z)}{dz} - \gamma_{\text{иг}} F_{\text{и}} [T_{\text{и}}(z) - T_{\text{г}}(z)] = 0, \quad (3)$$

где

$$\bar{\Phi}_c(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi_c(r, \theta, z) r dr d\theta,$$

а граничные условия для Φ_c имеют вид

$$\Phi_c(R, \theta, z) = \Phi_c(r, \theta, H) = \Phi_c(r, \theta, 0) = 0.$$

Известно, что уравнение (1) является уравнением на собственные значения. В общем виде оно запишется

$$\nabla^2 f_{lmn} + L^2_{lmn} f_{lmn} = 0.$$

Для рассматриваемого цилиндра и при нулевых граничных условиях, представляя f_{lmn} в виде $f_{lmn} = Z(z)R(r)S(\theta)$, найдем конечные и непрерывные в U решения

$$Z(z) = \sin \lambda_n z; \quad \lambda_n = \frac{\pi(n+1)}{H}; \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$S_z(\theta) = \sin m\theta; \quad S_{zz}(\theta) = \cos m\theta; \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

$$R(r) = J_m\left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r\right); \quad J_m(\gamma_{lm}) \equiv 0;$$

$$\|f_{lmn}\|^2 = \frac{\pi HR^2}{2\varepsilon_{lm}^2}; \quad m \neq 0$$

$$\|f_{l0n}\|^2 = \frac{\pi HR^2}{\varepsilon_{l0}^2}; \quad L_{lmn}^2 = \frac{\gamma_{lm}}{R^2} + \lambda_n^2.$$

Если

$B_c^2 \equiv \text{const}$, то так как $\Phi_c(r, \theta, z) > 0$,

$$\Phi_c = P \sin \frac{\pi}{H} z \cdot J_0\left(\frac{\gamma_{00}}{R} r\right); \quad (4)$$

$$B_c^2 = M^2 \left(\frac{\gamma_{00}}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right).$$

P — константа, характеризующая уровень мощности. Далее найдем, что

$$T_r = - \frac{\kappa \mu UHP}{\pi C_r M_r v_r} \cos \frac{\pi}{H} z; \quad (5)$$

$$T_n = \kappa \mu UP \left[\frac{\sin \frac{\pi}{H} z}{\gamma_{nr} F_n} - \frac{H \cos \frac{\pi}{H} z}{C_r M_r v_r \pi} \right]. \quad (6)$$

Реактор управляется пятью стержнями, расположенными соответственно в точках

$$(r', 0, z); \quad \left(r', \frac{\pi}{2}, z\right); \quad (r', \pi, z); \quad \left(r', \frac{3\pi}{2}, z\right); \quad (0, \theta, z).$$

В стационарном состоянии они находятся на половине высоты реактора. Толщина стержней несравнимо меньше поперечного сечения реактора, поэтому уравнение для стержня запишем следующим образом:

$$\rho_i = \delta [(r, r_i)(\theta, \theta_i)] \times \left(z - \frac{H}{2}\right). \quad (7)$$

2. Запишем уравнения для нестационарного реактора (для отклонений от стационарного уровня).

$$M^2 \nabla^2 \varphi(r, \theta, z, t) + B_c^2 \varphi(r, \theta, z, t) + \left[\alpha_n \tau_n(z, t) + \alpha_r \tau_r(z, t) + \sum_{i=1}^5 a_i \rho_i \right] \times \\ \times \Phi_c(r, z) = l^* \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (8)$$

$$C_n M_n \frac{d\tau_n(z, t)}{dt} = \mu U \bar{\varphi}(z, t) - \gamma_{nr} F_n [\tau_n(z, t) - \tau_r(z, t)]; \quad (9)$$

$$C_r M_r \frac{\partial \tau_r(z, t)}{\partial t} = \gamma_{nr} F_n [\tau_n(z, t) - \tau_r(z, t)] - C_r M_r v_r \frac{\partial \tau_r}{\partial z}(z, t). \quad (10)$$

$\varphi(r, \theta, z, t)$ представим рядом по собственным функциям

$$\varphi = P \sum_{l, m, n=0}^{\infty} J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r \right) \sin \lambda_n z [\varphi_{lmn}(t) \cos m \theta + \psi_{lmn}(t) \sin m \theta].$$

Поставим это выражение в уравнение (8) и учтем (4), (7).

Затем умножим полученное на какую-нибудь собственную функцию и проинтегрируем по области U ; так как f_{lmn} ортогональны, получим:

$$l \dot{\varphi}_{lmn} = \omega_{lmn}^2 \varphi_{lmn} + \|f_{lmn}\|^{-2} \left\{ \int_U [\alpha_n \tau_n + \alpha_r \tau_r] J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \lambda_0 z \cdot \sin \lambda_n z \cos m \theta \, dv + \sum_{i=1}^5 a_i r' J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r' \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r' \right) \cos m \theta_i h_n^i [z(t)] \right\}. \quad (11)$$

$$l \dot{\psi}_{lmn} = \omega_{lmn}^2 \psi_{lmn} + \|f_{lmn}\|^{-2} \sum_{i=1}^5 a_i r' J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r' \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r' \right) \times \\ \times \sin m \theta_i h_n^i [z(t)], \quad (12)$$

где

$$\omega_{lmn}^2 = M^2 (L_{000}^2 - L_{lmn}^2),$$

а

$$h_0^i = \frac{H}{4\pi} \left[\pi + \sin \frac{2\pi}{H} z(t) - \frac{2\pi}{H} z(t) \right], \\ h_1^i = \frac{H}{6\pi} \left[3 \sin \frac{\pi}{H} z(t) - \sin \frac{3\pi}{H} z(t) - 4 \right].$$

3. Из (11) (12) видно, что связь нейтронного потока с температурой осуществляется через интеграл.

$$I_{ll} = \int_U J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r \right) \sin \lambda_n z \sin \lambda_0 z \cos m \theta \times [\alpha_n \tau_n + \alpha_r \tau_r] \, dv.$$

Это выражение отлично от нуля только для $l=0$ и $m=0$. Учтывая это, получим

$$I_{ll} = \frac{2\pi R^2}{\varepsilon_{00}^2} \int_0^H \sin \lambda_0 z \cdot \sin \lambda_n z [\alpha_n \tau_n + \alpha_r \tau_r] \, dv.$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы исключить переменную z из этого выражения. Для этого существует несколько способов. Мы рассмотрим представление τ_n и τ_r на интервале $0-H$ рядом Фурье по косинусам, будем иметь

$$I_{ll} = \frac{R^2 H^2}{2\varepsilon_{00}^2} \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{\kappa}^{\nu} \left[\frac{\sin(n-\nu)\pi}{n-\nu} + \frac{\sin(n+\nu)\pi}{n+\nu} - \frac{\sin(n-\nu-2)\pi}{n-\nu+2} \right].$$

Подставим выражения

$$\tau_{\kappa}(z, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{\kappa}^{\nu}(t) \cos \frac{\pi \nu}{H} z;$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(z, t) &= \frac{1}{\pi R^2} \sum_{l, n=0}^{\infty} \varphi_{l0n}(t) \sin \lambda_n z \int_0^{2\pi} \int_0^R r J_0\left(\frac{\gamma_{l0} r}{R}\right) dr d\theta = \\ &= \frac{2}{R^2} \sum_{l, n=0}^{\infty} b_l \varphi_{l0n}(t) \sin \lambda_n z\end{aligned}$$

в уравнения (9), умножим их на $\left\| \cos \frac{\pi y}{H} z \right\|^{-2} \cos \frac{\pi y}{H} z$ и проинтегрируем от 0 до H ; получим:

$$\text{для } \nu = 0 \quad \tau_n^0 = \frac{\mu UH}{\pi^2 R^2 C_n M_n} \sum_{l, n=0}^{\infty} b_l \varphi_{l0n} \frac{G(n)}{n+1} - \frac{\gamma_{nr} F_n}{C_n M_n} (\tau_n^0 - \tau_r^0);$$

$$\tau_r^0 = \frac{\nu_r}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_r^j Y(j) + \frac{\gamma_{nr} F_n}{C_r M_r} (\tau_n^0 - \tau_r^0);$$

для $\nu \neq 0$

$$\tau_n^\nu = \frac{2\mu UH}{\pi^2 R^2 C_n M_n} \sum_{l, n=0}^{\infty} b_l \varphi_{l0n} \left[\frac{G(n+\nu)}{n+\nu+1} + \frac{G|n-\nu|}{n-\nu+1} \right] - \frac{\gamma_{nr} F_n}{C_n M_n} (\tau_n^\nu - \tau_r^\nu);$$

$$\tau_r^\nu = \frac{2\nu_r}{\pi} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \nu}}^{\infty} j \tau_r^j \left[\frac{Y(\nu+j)}{\nu+j} + \frac{Y(j-\nu)}{j-\nu} \right] + \frac{\gamma_{nr} F_n}{C_r M_r} (\tau_n^\nu - \tau_r^\nu),$$

где

$$G(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \text{ чётном} \\ 0 & \text{при } n \text{ нечётном} \end{cases}$$

$$Y(n) = 1 - G(n).$$

Записанные уравнения решались на АВМ «ЭМУ-10». Естественно, что принимались во внимание лишь первые члены бесконечных рядов. Было взято двенадцать «мод» для нейтронного потока и четыре — для температуры. Такое приближение обеспечивало необходимую точность.

Следует отметить, что аналоговая схема получилась простой, поэтому возможно дальнейшее уточнение модели. Ядерный реактор в этом смысле представляет большие возможности. Одним из путей уточнения является учет эффекта отравления ксеноном и йодом. Трудности, возникающие при этом, связаны с вычислением довольно сложных определенных интегралов. Далее следует учесть распределение нейтронов по энергиям (хотя бы двухгрупповое приближение), более полно учесть кинетику с запаздывающими нейтронами. Однако необходимо помнить, что речь идет о малых колебаниях исследуемых параметров около стационарного уровня, к тому же эти уточнения осуществимы лишь при наличии достаточного количества прецизионного оборудования.

Рассмотренный метод позволяет, с учетом всего вышеизложенного, построить глобальную модель ядерного реактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, М., 1949.
2. Д. Джексоп. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ГИИЛ, М., 1948.
3. Gian Paolo Caligiuri, Herve d'Hoop Nuovo metodo sperimentale analogico per la simulazione tridimensionale dei reattori nucleari. Rivista di ingegneria Vol. 12, № 5, 493—507, 1962.