ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИКИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

В. А. ТАРТАКОВСКИЙ, И. Г. ВИНТИЗЕНКО

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

В данной работе рассматривается применение разложения в ряд по собственным функциям для решения на АВМ дифференциальных уравнений в частных производных, отвечающих пространственно-временной динамике ядерного реактора.

Сущность рассматриваемого метода в том, что искомую функцию представляют бесконечным рядом по собственным функциям пространственного оператора исходной задачи. Временную зависимость содержат в себе коэффициенты ряда — моды.

1. Рассмотрим ядерный реактор, представляющий собой цилиндр с экстраполированными высотой H и радиусом R. В этом цилиндре находятся топливо, замедлитель и управляющие стержни. Охлаждение, достаточное для компенсации радиальных и азимутальных неравностей температурного поля, осуществляется газом, циркулирующим снизу вверх по каналам, параллельным вертикальной оси (оси z) цилиндра. Влияние замедлителя на тепловые процессы в системе предполагается незначительным. Диффузией тепла в топливе и теплоносителе пренебрегаем.

Стационарное состояние подобного реактора в одногрупповом диффузионном приближении описывается уравнениями.

$$M^2\nabla^2\Phi_с(r,\theta,z)+B_с^2\Phi_с(r,\theta,z)=0; \tag{1}$$

$$\mu U\bar{\Phi}_с(z)-\gamma_{иг}F_и[T_и(z)-T_г(z)]=0; \tag{2}$$

$$C_г M_г v_г\frac{dT_г(z)}{dz}-\gamma_{иг}F_и[T_и(z)-T_г(z)]=0, \tag{3}$$

где

$$\bar{\Phi}_с(z)=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R\Phi_с(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta,$$

а граничные условия для $\Phi_с$ имеют вид

$$\Phi_с(R,\theta,z)=\Phi_с(r,\theta,H)=\Phi_с(r,\theta,0)=0.$$

Известно, что уравнение (1) является уравнением на собственные значения. В общем виде оно запишется

$$\nabla^2 f_{lmn}+L^2_{lmn}f_{lmn}=0.$$

Для рассматриваемого цилиндра и при нулевых граничных условиях, представляя f_{lmn} в виде $f_{lmn} = Z(z) R(r) S(\theta)$, найдем конечные и непрерывные в U решения

$$Z(z) = \sin \lambda_n z; \quad \lambda_n = \frac{\pi (n+1)}{H}; \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$S_{\prime}(\theta) = \sin m\theta; \quad S_{\prime\prime}(\theta) = \cos m\theta; \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

$$R(r) = J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r \right); \quad J_m(\gamma_{lm}) \equiv 0;$$

$$\| f_{lmn} \|^2 = \frac{\pi H R^2}{2\varepsilon_{lm}^2}; \quad m \neq 0$$

$$\| f_{lon} \|^2 = \frac{\pi H R^2}{\varepsilon_{lo}^2}; \quad L_{lmn}^2 = \frac{\gamma_{lm}}{R^2} + \lambda_n^2.$$

Если
$B_c^2 \equiv \text{const}$, то так как $\Phi_c(r, \theta, z) > 0$,

$$\Phi_c = P \sin \frac{\pi}{H} z \cdot J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r \right); \tag{4}$$

$$B_c^2 = M^2 \left(\frac{\gamma_{00}}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right).$$

P — константа, характеризующая уровень мощности. Далее найдем, что

$$T_г = - \frac{\kappa \mu U H P}{\pi C_г M_г v_г} \cos \frac{\pi}{H} z; \tag{5}$$

$$T_и = \kappa \mu U P \left[\frac{\sin \frac{\pi}{H} z}{\gamma_{иг} F_и} - \frac{H \cos \frac{\pi}{H} z}{C_г M_г v_г \pi} \right]. \tag{6}$$

Реактор управляется пятью стержнями, расположенными соответственно в точках

$$(r', 0, z); \left(r', \frac{\pi}{2}, z \right); (r', \pi, z); \left(r', \frac{3\pi}{2}, z \right); (0, \theta, z).$$

В стационарном состоянии они находятся на половине высоты реактора. Толщина стержней несравнимо меньше поперечного сечения реактора, поэтому уравнение для стержня запишем следующим образом:

$$\rho_i = \delta [(r, r_i)(\theta, \theta_i)] \times \left(z - \frac{H}{2} \right). \tag{7}$$

2. Запишем уравнения для нестационарного реактора (для отклонений от стационарного уровня).

$$M^2 \nabla^2 \varphi(r, \theta, z, t) + B_c^2 \varphi(r, \theta, z, t) + \left[\alpha_и \tau_и(z, t) + \alpha_г \tau_г(z, t) + \sum_{i=1}^{5} a_i \rho_i \right] \times$$

$$\times \Phi_c(r, z) = l^* \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \tag{8}$$

$$C_и M_и \frac{d\tau_и(z, t)}{dt} = \mu U \bar{\varphi}(z, t) - \gamma_{иг} F_и [\tau_и(z, t) - \tau_г(z, t)]; \tag{9}$$

$$C_г M_г \frac{\partial \tau_г (z, t)}{\partial t} = \gamma_{иг} F_и [\tau_и (z, t) - \tau_г (z, t)] - C_г M_г v_г \frac{\partial \tau_г}{\partial z} (z, t). \qquad (10)$$

$\varphi (r, \theta, z, t)$ представим рядом по собственным функциям

$$\varphi = P \sum_{l,m,n=0}^{\infty} J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r \right) \sin \lambda_n z \, [\varphi_{lmn} (t) \cos m\theta + \psi_{lmn} (t) \sin m\theta].$$

Поставим это выражение в уравнение (8) и учтем (4), (7).

Затем умножим полученное на какую-нибудь собственную функцию и проинтегрируем по области U; так как f_{lmn} ортогональны, получим:

$$\overset{*}{l} \dot{\varphi}_{lmn} = \omega^2_{lmn} \varphi_{lmn} + \| f_{lmn} \cdot \|^{-2} \left\{ \int_U [\alpha_и \tau_и + \alpha_г \tau_г] J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sin \lambda_0 z \cdot \sin \lambda_n z \cos m\theta \, dv + \sum_{i=1}^{5} a_i r' J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r' \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r' \right) \cos m\theta_i h^i_n [z (t)] \right\}. \qquad (11)$$

$$\overset{*}{l} \dot{\psi}_{lmn} = \omega^2_{lmn} \psi_{lmn} + \| f_{lmn} \|^{-2} \sum_{i=1}^{5} a_i r' J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r' \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r' \right) \times$$

$$\times \sin m\theta_i \, h^i_n [z (t)], \qquad (12)$$

где

$$\omega^2_{lmn} = M^2 (L^2_{000} - L^2_{lmn}),$$

а

$$h^i_0 = \frac{H}{4\pi} \left[\pi + \sin \frac{2\pi}{H} z (t) - \frac{2\pi}{H} z (t) \right],$$

$$h^i_1 = \frac{H}{6\pi} \left[3 \sin \frac{\pi}{H} z (t) - \sin \frac{3\pi}{H} z (t) - 4 \right].$$

3. Из (11) (12) видно, что связь нейтронного потока с температурой осуществляется через интеграл.

$$I_{\shortparallel} = \int_U J_0 \left(\frac{\gamma_{00}}{R} r \right) J_m \left(\frac{\gamma_{lm}}{R} r \right) \sin \lambda_n z \sin \lambda_0 z \cos m\theta \times [\alpha_и \tau_и + \alpha_г \tau_г] \, dv.$$

Это выражение отлично от нуля только для $l = 0$ и $m = 0$. Учитывая это, получим

$$I_{\shortparallel} = \frac{2\pi R^2}{\varepsilon^2_{00}} \int_0^H \sin \lambda_0 z \cdot \sin \lambda_n z \, [\alpha_и \tau_и + \alpha_г \tau_г] \, dv.$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы исключить переменную z из этого выражения. Для этого существует несколько способов. Мы рассмотрим представление $\tau_и$ и $\tau_г$ на интервале $0 - H$ рядом Фурье по косинусам, будем иметь

$$I_{\shortparallel} = \frac{R^2 H^2}{2\varepsilon^2_{00}} \sum_{\kappa=1}^{2} \alpha_\kappa \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau^\nu_\kappa \left[\frac{\sin (n - \nu) \pi}{n - \nu} + \frac{\sin (n + \nu) \pi}{n + \nu} - \frac{\sin (n - \nu - 2) \pi}{n - \nu + 2} \right].$$

Подставим выражения

$$\tau_\kappa (z, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau^\nu_\kappa (t) \cos \frac{\pi\nu}{H} z;$$

$$\bar{\varphi}(z,t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{l,n=0}^{\infty} \varphi_{l0n}(t) \sin \lambda_n z \int_0^{2\pi} \int_0^R r J_0 \left(\frac{\gamma_{l0}}{R} r \right) dr\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{R^2} \sum_{l,n=0}^{\infty} b_l \varphi_{l0n}(t) \sin \lambda_n z$$

в уравнения (9), умножим их на $\left\| \cos \frac{\pi \nu}{H} z \right\|^{-2} \cos \frac{\pi \nu}{H} z$ и проинтегрируем от 0 до H; получим:

для $\nu = 0$ $\dot{\tau}_{\text{и}}^0 = \frac{\mu U H}{\pi^2 R^2 C_{\text{и}} M_{\text{и}}} \sum_{l,n=0}^{\infty} b_l \varphi_{l0n} \frac{G(n)}{n+1} - \frac{\gamma_{\text{иг}} F_{\text{и}}}{C_{\text{и}} M_{\text{и}}} (\tau_{\text{и}}^0 - \tau_{\text{г}}^0);$

$$\dot{\tau}_{\text{г}}^0 = \frac{v_{\text{г}}}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{\text{г}}^j Y(j) + \frac{\gamma_{\text{иг}} F_{\text{и}}}{C_{\text{г}} M_{\text{г}}} (\tau_{\text{и}}^0 - \tau_{\text{г}}^0);$$

для $\nu \neq 0$

$$\dot{\tau}_{\text{и}}^{\nu} = \frac{2 \mu U H}{\pi^2 R^2 C_{\text{и}} M_{\text{и}}} \sum_{l,n=0}^{\infty} b_l \varphi_{l0n} \left[\frac{G(n+\nu)}{n+\nu+1} + \frac{G|n-\nu|}{n-\nu+1} \right] - \frac{\gamma_{\text{иг}} F_{\text{и}}}{C_{\text{и}} M_{\text{и}}} (\tau_{\text{и}}^{\nu} - \tau_{\text{г}}^{\nu});$$

$$\dot{\tau}_{\text{г}}^{\nu} = \frac{2 v_{\text{г}}}{\pi} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \nu}}^{\infty} j \tau_{\text{г}}^j \left[\frac{Y(\nu+j)}{\nu+j} + \frac{Y(j-\nu)}{j-\nu} \right] + \frac{\gamma_{\text{иг}} F_{\text{и}}}{C_{\text{г}} M_{\text{г}}} (\tau_{\text{и}}^{\nu} - \tau_{\text{г}}^{\nu}),$$

где

$$G(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } n \text{ чётном} \\ 0 \text{ при } n \text{ нечётном} \end{cases}$$

$$Y(n) = 1 - G(n).$$

Записанные уравнения решались на АВМ «ЭМУ-10». Естественно, что принимались во внимание лишь первые члены бесконечных рядов. Было взято двенадцать «мод» для нейтронного потока и четыре — для температуры. Такое приближение обеспечивало необходимую точность.

Следует отметить, что аналоговая схема получилась простой, поэтому возможно дальнейшее уточнение модели. Ядерный реактор в этом смысле представляет большие возможности. Одним из путей уточнения является учет эффекта отравления ксеноном и йодом. Трудности, возникающие при этом, связаны с вычислением довольно сложных определенных интегралов. Далее следует учесть распределение нейтронов по энергиям (хотя бы двухгрупповое приближение), более полно учесть кинетику с запаздывающими нейтронами. Однако необходимо помнить, что речь идет о малых колебаниях исследуемых параметров около стационарного уровня, к тому же эти уточнения осуществимы лишь при наличии достаточного количества прецизионного оборудования.

Рассмотренный метод позволяет, с учетом всего вышеизложенного, построить глобальную модель ядерного реактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, М., 1949.

2. Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ГИИЛ, М., 1948.

3. Gian Paolo Caligiuri, Herve d'Hoop Nuovo metodo sperimentale analogico per la simulazione tridimensionale dei reattori nucleari. Rivista di ingegneria Vol. 12, № 5, 493—507, 1962.