

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НА АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
МАШИНАХ (АВМ) ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ
ПРЕДЕЛАМИ**

В. В. ЦЫГАНКОВ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

Для исследования систем управления широкое применение нашли АВМ. При этом задача заключается в моделировании объекта управления и регулятора. Чаще всего подобные задачи решаются для случая, когда объект управления описывается дифференциальными уравнениями. Однако этим не ограничивается все многообразие объектов управления, и, в частности, последний может быть описан интегралом с переменными пределами.

Например, с такой задачей приходится сталкиваться при рассмотрении ускорителя заряженных частиц — синхротрона как объекта управления. Выходной параметр синхротрона — число ускоренных частиц — является функцией таких параметров, как момент инжекции частиц, момент включения высокочастотного ускоряющего поля и т. д., и пропорционален произведению интегралов, пределы которых зависят от вышеуказанных параметров [1].

Пусть требуется реализовать на АВМ интеграл:

$$I(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x) dx, \quad (1)$$

где

$f(x)$ — функция, заданная в виде графика, интеграл от которой не может быть вычислен аналитически;
 $x_1(t)$, $x_2(t)$ — переменные пределы, имеющие конечную производную по параметру t .

Воспользуемся выражением для производной от интеграла [2]:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x, t) dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(x_2, t) \frac{dx_2}{dt} - f(x_1, t) \frac{dx_1}{dt}. \quad (2)$$

Для случая (1) формула (2) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x) dx = f(x_2) \cdot \frac{dx_2}{dt} - f(x_1) \frac{dx_1}{dt}. \quad (3)$$

Из выражения (3) следует схема моделирования интеграла (1) рис. 1. Значение $I(0)$ задается начальными условиями интегратора, если $I(0)$ известно. Если $I(0)$ неизвестно, то его легко получить на вы-

ходе интегратора, в силу свойств последнего запомнить напряжение на выходе. Для этого достаточно изменить x_1 и x_2 от нуля до $x_1(0)$ и $x_2(0)$ соответственно. Причем порядок и закон изменения x_1 и x_2 не имеет существенного значения. Важно, чтобы операция дифференцирования x_1 и x_2 выполнялась без большой погрешности.

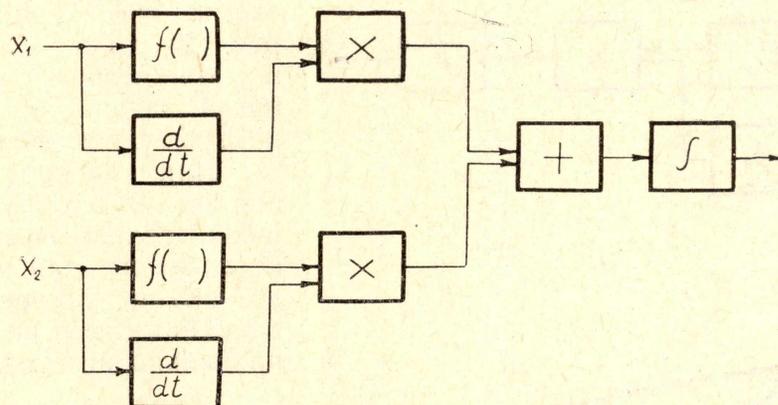


Рис. 1. Блок-схема непрерывного моделирования интеграла с переменными пределами

Верхняя область частоты изменения пределов ω_{x_1} и ω_{x_2} при моделировании (1) по схеме рис. 1 ограничена динамической погрешностью блока перемножения, которая составляет 1% в области до 100 гц. Нижняя область частот изменения ω_{x_1} и ω_{x_2} ограничена погрешностью операции дифференцирования. Схема рис. 1 соответствует непрерывной модели интеграла (1) в отличие от импульсной, предлагаемой ниже.

Действительно, интегрируя выражение (3) при $x_1=0$, получим широко известную схему интегрирования на АВМ по переменной, не являющейся временем:

$$\int f(x) dx = \int \left[f(x) \frac{dx}{dt} \right] dt. \quad (4)$$

Если согласно (4) изменять x от x_1 до x_2 , то получим схему импульсного моделирования интеграла (1) рис. 2, так как напряжение на выходе интегратора равно интегралу (1) в моменты времени t_1, t_2, \dots . Соотношения между частотами ω_{x_1} , ω_{x_2} и частотой осциллирующей функции ω_x должны удовлетворять теореме Котельникова, поэтому схему рис. 2 можно рекомендовать для моделирования интеграла (1) с низкочастотными пределами. Обе схемы рис. 1 и 2 охватывает весь частотный диапазон АВМ.

Если в (2) $\omega_f \ll \omega_{x_1}, \omega_{x_2}$, где ω_f — частота изменения подынтегральной функции, то возможно вычисление и интеграла

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x, t) dt. \quad (5)$$

Если модули производных

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial x_1}{\partial t} \right|, \quad \left| \frac{\partial x_2}{\partial t} \right|$$

одного порядка, а $\omega_f \ll \omega_{x_1}, \omega_{x_2}$, то погрешность моделирования выражения (5) по схеме рис. 1 существует в первый момент времени пос-

ле изменения $f(x, t)$, т. е. осуществляется моделирование интеграла (5) с некоторым запаздыванием. При моделировании же интеграла (5) по схеме рис. 2 погрешность вообще отсутствует, если изменение подынтегральной функции от аргумента t аппроксимировать ступенчатой линией, т. е. $f(x, t_i) = \text{const}$ в момент интегрирования по x . При этом частоты ω_f , ω_{x_1} и ω_{x_2} могут быть одного порядка.

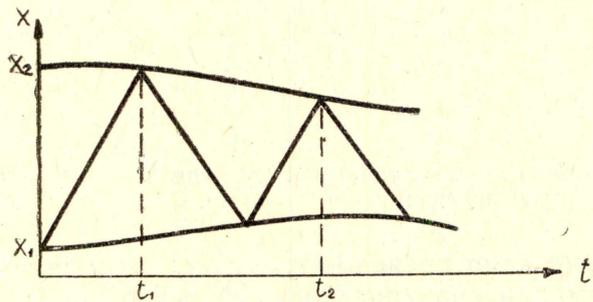
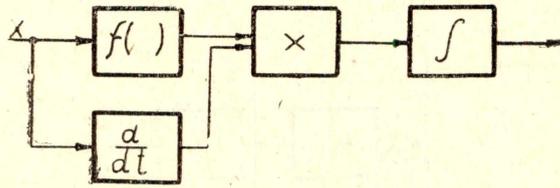


Рис. 2. Блок-схема и временная диаграмма импульсного моделирования интеграла с переменными пределами

выражение (3), получим схему, аналогичную рис. 1, которую можно рассматривать как функциональный блок. Интеграл (6) будет равен

$$\int_{a(t)}^{b(t)} I(y, t) dy. \quad (7)$$

Последнее выражение аналогично (5), и, учитывая ограничения, относящиеся к моделированию (5) по схеме рис. 1, получим схему моделирования интеграла (6).

Заключение

В статье даются методы и схемы моделирования интегралов с переменными пределами, для случая, когда подынтегральная функция не зависит от времени, а также при наличии этой зависимости. В частности, данные методы могут быть применены при моделировании синхротрона как объекта управления, если пучок инжектируемых частиц не имеет углового разброса и распределение частиц по амплитудам бетатронных колебаний неравномерно.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Данилкин, М. С. Рабинович. ЖТФ, т. 28, в. 2, 1958.
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 2, ГИТТЛ, М., 1957.

Вопрос о применимости схемы рис. 1 или схемы рис. 2 должен решаться в конкретных условиях, когда заданы ω_f , ω_{x_1} , ω_{x_2} , контур управления и т. д.

При несколько ином подходе к выводу соотношений захвата частиц в ускорение, нежели в [1], число частиц, ускоренных до конечной энергии, пропорционально интегралу

$$\int_a^b \int_c^{d-y} f(x) dx dy, \quad (6)$$

где a, b, c, d — функции времени.

Рассмотрим внутренний интеграл

$$I(y, t) = \int_c^{d-y} f(x) dx.$$

Записывая для него