ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДАХ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

Известно, что под импульсной функцией объекта (системы, цепи и т. п.) понимают реакцию этого объекта на возмущение в виде импульса бесконечно большой амплитуды и бесконечно малого по длительности (энергия такого импульса равна единице). Математически такое возмущение описывается δ-функцией. Однако практически оно не может быть реализовано при экспериментальном определении импульсной функции. Для этих целей приходится прибегать к импульсам конечной амплитуды и конечной длительности δ, поэтому выходной сигнал будет описываться временной функцией $g(t)$, отличной от импульсной $\gamma(t)$.

Обычно считается, что если $\delta \ll \tau$, где τ — постоянная объекта, то выходной сигнал $g(t)$ мало отличается от импульсной функции $\gamma(t)$, и изменением формы можно пренебречь. Однако в ряде случаев, в частности при экспериментальном методе определения реакции объекта на внешнее возмущение, для которого δ сравнимо с τ и особенно в измерительных системах, использующих кодоимпульсную модуляцию, учет этого факта становится необходимым.

В данной работе исследуется изменение формы выходного сигнала объекта по сравнению с импульсной характеристикой, когда длительность входного сигнала δ сравнима с постоянной объекта τ.

Ниже будем считать, что импульсная функция объекта $\gamma(t)$ известна, и требуется определить реакцию этого объекта на импульс прямоугольной формы длительностью δ и амплитудой $1/\delta$, т. е. импульс единичной энергии. Аналитически такой сигнал записывается в следующем виде:

$$x(t) = \frac{1}{\delta}\left[\sigma(t) - \sigma(t-\delta)\right], \tag{1}$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

— функция единичного скачка.

Решение поставленной задачи, как известно, дается интегралом Дюамеля:

$$g(t) = \int_0^t x(t-\lambda)\,\gamma(\lambda)\,d\lambda. \tag{2}$$

Считая $\gamma(t)$ четной функцией и учитывая (1), (2), запишется

$$g(t) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\gamma(t+\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Соотношение (3) можно истолковать следующим образом: функция $g(t)$ получается из $\gamma(t)$ путем локального усреднения последней вокруг точки t на интервале $[-\delta/2, \delta/2]$. Иными словами, функция $g(t)$ в точке t равна среднему значению функции $\gamma(t)$ на интервале $[-\delta/2, \delta/2]$ с центром в точке t. Такое усреднение придает функции $g(t)$ более плавный характер изменения, причем это „сглаживание неровностей" сказывается тем сильнее, чем больше величина интервала δ, на который распространяется усреднение [1].

Выяснив характер связи функций $g(t)$ и $\gamma(t)$, нетрудно определить величину отклонения одной функции от другой. С этой целью представим функцию $\gamma(t)$ рядом Тейлора в окрестности точки t:

$$\gamma(t+\xi) = \gamma(t) + \xi\gamma'(t) + \frac{\xi^2}{2}\gamma''(t) + \ldots \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и рассматривая ξ как переменную, проинтегрируем по промежутку $[-\delta/2, \delta/2]$. Получим

$$g(t) = \gamma(t) + \frac{\delta^2}{24}\gamma''(t). \tag{5}$$

Отсюда определяем отклонение $g(t)$ от $\gamma(t)$:

$$g(t) - \gamma(t) = \Delta(t) = \frac{\delta^2}{24}\gamma''(t). \tag{6}$$

Из полученного соотношения видно, что при $\delta \to 0$ $g(t) \to \gamma(t)$, т. е., когда длительность входного сигнала уменьшается, реакция объекта стремится к импульсной характеристике в каждой точке t. С помощью соотношения (6) можно оценить максимальное отклонение функции $g(t)$ от $\gamma(t)$ при данном δ. Обозначая через

$$M_2 = \max|\gamma''(t)|,$$

имеем

$$\Delta = \frac{\delta^2}{24}M_2. \tag{7}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим один из наиболее распространенных элементов информационных систем, использующих принцип кодоимпульсной модуляции, фильтр низкой частоты [2]. Импульсная функция фильтра

$$\gamma(t) = \frac{\sin\frac{\pi}{\tau}t}{\frac{\pi}{\tau}\cdot t}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3), находим

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\tau}{\delta}\left[Si\frac{\pi}{\tau}\left(t+\frac{\delta}{2}\right) - Si\frac{\pi}{\tau}\left(t-\frac{\delta}{2}\right)\right]. \tag{9}$$

Функция (9) при малых значениях δ незначительно отличается от функции (8), однако, при возрастании δ это отличие становится существенным. В частности, это сопровождается некоторым снижением амплитуды центрального максимума и его уширением вокруг точки $t=0$, а также резким снижением амплитуд вторичных максимумов функции (9) и их быстрым затуханием. Учет этого факта весьма существен при проектировании систем дискретной выборки [3].

Формула (9) справедлива для любых значений δ и τ. В частности, при $\delta=\tau$

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\left[Si\,\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\right) - Si\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{10}$$

В измерительных системах часто бывает важно знать изменение сигнала $g(t)$ в зависимости от δ в области центрального максимума (в момент взятия отсчета). Для функции (9)

$$\gamma''(0) = -\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\tau^2} \tag{11}$$

и, подставляя в (6), находим

$$\Delta(0) = -\frac{\pi^2}{72}\frac{\delta^2}{\tau^2}, \tag{12}$$

откуда видно, что в точке $t=0$ происходит снижение амплитуды в зависимости от отношения δ/τ. Для функции (10) это снижение равно $\pi^2/_{72}=0{,}137$. Совершенно аналогично определяется отклонение для всех остальных интересующих точек.

Выводы

1. Рассмотрена связь между импульсной характеристикой объекта и его реакцией на прямоугольный сигнал любой длительности.

2. Дана методика расчета отклонения указанных величин (п. 1) друг от друга при любых соотношениях параметров объекта и входного возмущения. Применение методики показано на примере анализа фильтра низкой частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа, стр. 237, Физматгиз, 1961.

2. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике, стр. 415, изд-во ИЛ, 1963.

3. С. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы, стр. 537, изд-во ИЛ, 1962.