

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ФИЛЬТРОВ

А. Н. ЛАФЕРОВ, И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

При решении многих инженерных задач приходится пользоваться преобразованием Фурье. В частности, определение реакции  $\gamma(t)$  фильтра низкой частоты (ФНЧ) при действии на вход устройства сигнала, спектр которого известен. Решение задачи дается выражением

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1)$$

где

$S(\omega)$  — спектр входного сигнала,  
 $K(\omega) = |F(j\omega)|$  — модуль передаточной функции фильтра.

Нахождение такого интеграла сводится к вычислению синус- или косинус-преобразований, которые для четной и нечетной функций запишутся:

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty} \psi(\omega) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \omega t d\omega. \quad (2)$$

В рассматриваемой задаче

$$S(\omega) = A\delta \frac{\sin \frac{\delta}{2} \omega}{\frac{\delta}{2}} \quad (3)$$

— спектр прямоугольного импульса длительности  $\delta$ ;

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}}} \quad (4)$$

— спектральная характеристика ФНЧ по Баттерворту порядка  $m$  с частотой среза  $\omega_c$ , поэтому

$$\Psi(\omega) = S(\omega) \cdot K(\omega) = \frac{A\delta \sin \frac{\delta}{2} \omega}{\frac{\delta}{2} \omega \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}}}. \quad (5)$$



Существуют специальные таблицы вычисления преобразования Фурье, для случаев, когда специальная функция  $\Psi(\omega)$  выражается через элементарные или специальные функции.

Для вычисления интеграла (2) можно построить механическую квадратуру:

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty} \Psi(\omega) \cos \omega d\omega \approx \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa} \cdot \varphi(x_{\kappa}). \quad (6)$$

Коэффициент  $A_{\kappa}$  и  $x_{\kappa}$  для узлов можно найти в [1], при этом необходимо представить спектральную функцию (5) в виде

$$\Psi(\omega) = \frac{\Phi(x)}{(1+x)^{s+1}}, \quad (7)$$

где  $i = 1, 2, 3 \dots$  и  $s$  — порядок роста.

Представление (7) вызывает, в свою очередь, дополнительные вычисления. Описываемый ниже метод решения позволяет привести интеграл (1) к табличному. Для этого предлагается в подынтегральном выражении (1) геометрически перемножить  $S(\omega)$  и  $K(\omega)$ , а затем произвести аппроксимацию отдельных участков получившегося графика функций  $\Psi(\omega)$ .

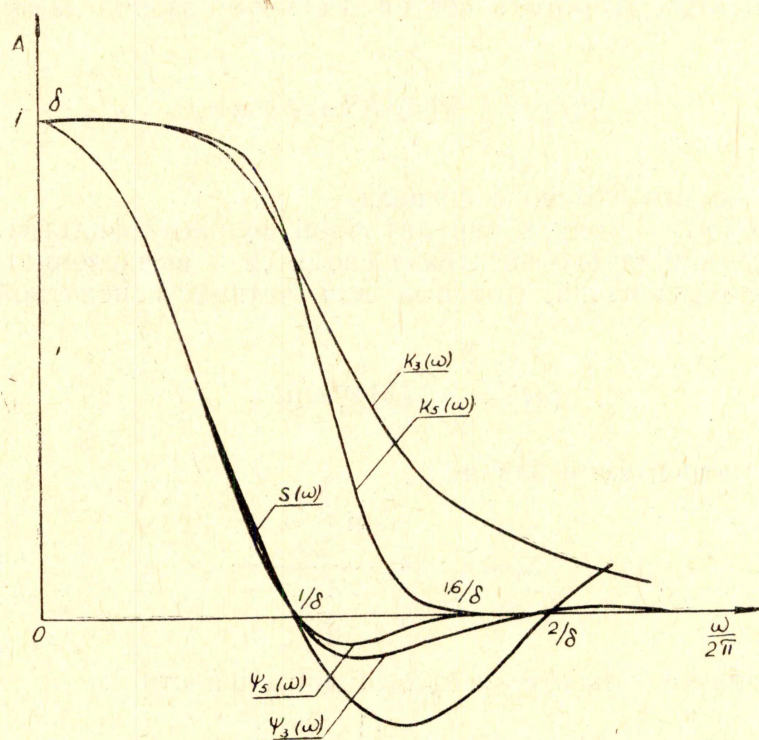


Рис. 1. Спектральные характеристики активного фильтра НЧ в приближении по Баттерворту для  $m=3$  и  $m=5$

На рис. 1 приведены графики функций  $S(\omega)$ ,  $K(\omega)$  для  $m=5$ ,  $m=3$ , при частоте среза  $\omega_c = 1/\delta$ . Полученные функции  $\Psi_5(\omega)$  и  $\Psi_3(\omega)$  нормированы к 1. Из графика видно, что на участке  $0 \div 1/\delta$   $\Psi_5(\omega)$  с большой точностью совпадает с функцией  $S(\omega)$ , а на интервале  $1/\delta \div 1.6/\delta$  произведем аппроксимацию многочленом Лагранжа [2] по 4 точкам:  $1/\delta$ ,  $1.2/\delta$ ,  $1.4/\delta$ ,  $1.6/\delta$ .



Значениями спектральной функции в интервале  $1,6/\delta \div \infty$  пренебрегаем ввиду малости. В результате имеем

$$\Psi_5(\omega) = \frac{\sin \omega \frac{\delta}{2}}{\omega \frac{\delta}{2}} \int_0^{1/\delta} \left[ 1,72 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^3 - 7,09 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 + 9,57 \frac{\omega}{2\pi} - 4,2 \right]_{1/\delta}^{1,6/\delta} d\omega. \quad (8)$$

Косинус-преобразование первого члена (8) дает

$$\varphi(t) = \int_0^{1/\delta} \frac{\sin \omega \frac{\delta}{2} \cos \omega t}{\omega \frac{\delta}{2}} d\omega = \frac{1}{\delta} [Si(t + 0,5) - Si(t - 0,5)]. \quad (9)$$

Полное выражение ФНЧ на импульс конечной длительности  $\delta$  запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \varphi(t) + h(t) = & \frac{1}{\delta} \left\{ [Si(t + 0,5) - Si(t - 0,5)] - \right. \\ & - \int_{1/\delta}^{1,6/\delta} \left[ 1,72 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^3 - 7,09 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + 9,57 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) - 4,2 \right] \cos \omega t d\omega. \right. \end{aligned} \quad (10)$$

В этом выражении все интегралы являются табличными. Первое слагаемое в (10) представляет собой реакцию системы на импульс длительности  $\delta$  идеального фильтра, для которого

$$K(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_c, \end{cases}$$

при этом, как следует из (4),  $\varphi(t)$  тем точнее соответствует реакции фильтра, чем больше  $m$ . Второе слагаемое  $h(t)$  вносит поправку, получаемую за счет конечного  $\delta$  и с ростом последнего  $|h(t)| \rightarrow 0$ . При условии  $\delta \ll \tau_c$  ( $\tau_c$  — постоянная фильтра),  $S(\omega) = \text{const}$ , определяющим параметром реакции на выходе фильтра является порядок  $m$  (кривые  $K_5(\omega)$ ,  $K_3(\omega)$ , рис. 1). Расчеты показывают, что уже при

$m = 5$  ( $\tau_c = \delta$ ) энергетический вклад высоких частот спектральной функции  $\Psi_5(\omega)$  составляет не более 3,6%. Для  $\Psi_3(\omega)$  этот вклад гораздо больше.

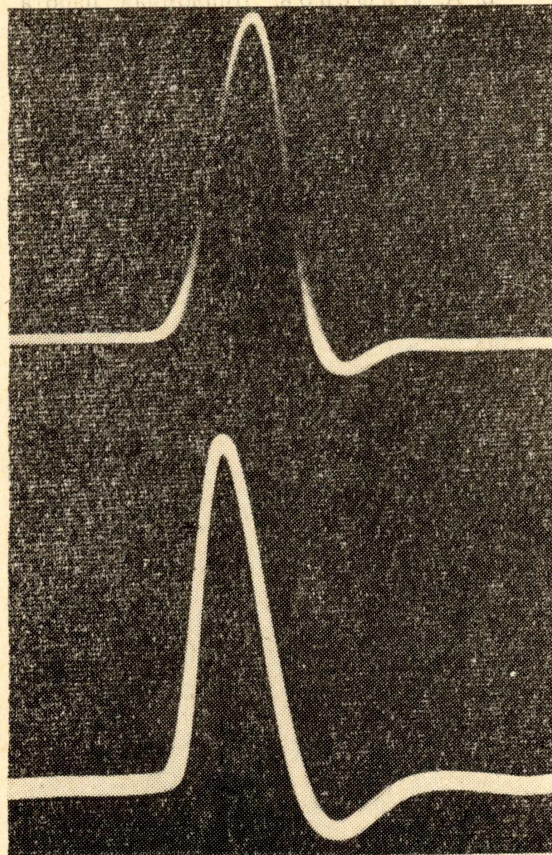


Рис. 2. Реакции ФНЧ на импульс конечной длительности для  $m = 5$  (верхний) и  $m = 3$  (нижний)



Учитывая, что ВЧ компоненты спектра влияют главным образом на значение функции в области  $t = 0$ , можно предположить, что  $\gamma'_3(t) > \gamma'_5(t)$ . Данное положение иллюстрируется осциллограммами на рис. 2 для верхней осциллограммы —  $m = 5$ , для нижней —  $m = 3$  и рис. 1 ( $\Psi_5(\omega)$  в интервале  $1/\delta \div 2/\delta$ ).

### Выводы

В статье приводится метод приближенного вычисления обратного преобразования Фурье для анализа радиотехнических устройств и на примере активного фильтра НЧ по Баттерворту дается исследование влияния параметров устройства на импульсную функцию.

Приведенная методика остается справедливой и для преобразования Фурье.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Кругликова. Таблицы для численного преобразования Фурье. «Наука и техника», 1964.
  2. А. Анго. Математика для электро- и радионинженеров. «Наука», 1964.
  3. А. Лаферов. Дипломная работа. ТПИ, 1966.
-