ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ В ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

В. П. ТИМОЩЕНКО

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

В работах [3, 4] строилось операторное исчисление на основе понятия обобщенной функции и разрабатывался аппарат для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В настоящей работе операторный метод в обобщенных функциях распространяется на обыкновенные дифференциальные уравнения, имеющие как переменные, так и постоянные коэффициенты.

1. Множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторой конечной области (зависящей от φ), называется основным пространством основных финитных функций.

Последовательность основных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется сходящейся к нулю в пространстве K, если эти функции обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю так же, как и их производные любого порядка.

Каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве K, называется обобщенной функцией (см. [1], стр. 13).

Функционал, который ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ ее значение в точке $x_0=0$, будем называть дельта-функцией и обозначать через $\delta(x)$; таким образом,

$$(\delta(x),\ \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Говорят, что обобщенная функция f равна нулю в окрестности ε точки x_0, если для каждой основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в пределах этой окрестности ε, имеет место равенство $(f, \varphi)=0$.

Если же обобщенная функция f не равна нулю ни в какой окрестности точки x_0, то x_0 называется существенной для функционала f.

Множество всех существенных точек обобщенной функции называется ее носителем.

Функционал f', определяемый для каждой обобщенной функции f на любой основной функции φ равенством $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$, где $\varphi'(x)$ — производная от функции $\varphi(x)$, называется обобщенной производной от f.

Обозначим через s оператор дифференцирования обобщенной функции, т. е. имеем $f' = sf$.

Введем операторы следующего вида:

$$T(s, x) f = ([p_0 g_0(x) S^{n-1} + p_1 g^{(x)} S^{n-2} + \ldots + p_{n-1} g_{n-1}^{(x)}] f, \varphi) =$$

$$= \Big(f, (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [p_0 g_0(x) \varphi(x)] +$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [p_1 g_1(x) \varphi(x)] + \ldots + p_{n-1}^{(x)} \varphi(x)\Big),$$

$$S_{(s)}^n = S^n + \alpha_0 a_0 S^{n-1} + \alpha_1 a_1 S^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} a_{n-1},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная основная функция из K; $a_i = \text{const}$; $p_i = 0,1$; $\alpha_i = 0,1$; $g_i(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции; $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Заметим, что для оператора $T(s, x)$ операции дифференцирования и умножения на функцию не перестановочны.

Сверткой $f_1 * f_2$ двух обобщенных функций f_1 и f_2 называется обобщенная функция, определяемая на любой основной функции φ равенством

$$(f_1 * f_2, \varphi) = (f_2(y), (f_1(x), \varphi(x+y))).$$

В работе [3] показывается, что множество K'_+ всех обобщенных функций, носители которых находятся на полуоси $[0, \infty)$, образуют кольцо без делителей нуля с обычной операцией сложения обобщенных функций и операцией умножения—сверткой обобщенных функций.

2. Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) - g_0(x) y^{(n-1)}(x) - \ldots - g_{n-1}(x) y(x) = f(x), \quad x \geq 0 \qquad (1)$$

при следующих начальных данных Коши:

$$y^{(\kappa)}(0) = 0, \ \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$
$$y^{(n-1)}(0) = 1. \qquad (2)$$

Такое задание начальных условий не нарушает общности задачи Коши для уравнения (1), так как всякое уравнение порядка n, удовлетворяющее произвольным начальным данным

$$y_{(0)}^{(\kappa)} = y_0^{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

можно с помощью некоторого преобразования свести к новому уравнению, удовлетворяющему начальным условиям (2).

Коэффициенты $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x)$ будем полагать бесконечно дифференцируемыми функциями, и при том некоторые из них могут быть постоянными величинами, а правую часть $f(x)$ — непрерывной функцией на всей оси $[0, \infty)$. Решение же уравнения (1) будем искать на множестве K'_+.

В операторной форме уравнение (1), с учетом условий (2), запишется следующим образом:

$$(S_{(s)}^n - T(s, x)) y = f + \delta, \quad x \geq 0.$$

Если существует единственная обобщенная функция $y \in K'_+$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2), то y будем называть решением этого уравнения и обозначать

$$y = \frac{f + \delta}{S_{(s)}^n - T} \equiv \frac{f}{S_{(s)}^n - T} + \frac{\delta}{S_{(s)}^n - T}.$$

Производя формально деление функции f, а затем δ-функции на оператор $S^n_{(s)} - T(s, x)$, мы получим решение в виде следующего ряда:

$$y = \frac{1}{S^n(s)} + \frac{1}{S^n(s)} * \left(T(s, x)\left[\frac{1}{S^n(s)}\right]\right) + \frac{1}{S^n(s)} * \left(T(s, x)\left[\frac{1}{S^n(s)} *\right.\right.$$
$$\left.\left. * \left(T(s, x)\left[\frac{1}{S^n(s)}\right]\right)\right]\right) + \dots \frac{f}{S^n(s)} + \frac{1}{S^n(s)} * \left(T(s, x)\left[\frac{1}{S^n(s)}\right]\right) +$$
$$+ \frac{1}{S^n(s)} * \left[T(s, x)\left(\frac{1}{S^n(s)} * \left(T(s, x)\left[\frac{1}{S^n(s)}\right]\right)\right]\right) + \dots,$$

где $1 \equiv \delta(x)$.

Или кратко:

$$y = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{1}{S^n(s)} * T(s, x)\right)^{\kappa} \frac{f}{S^n(s)} + \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{1}{S^n(s)} * T(s, x)\right) \frac{1}{S^n(s)}\Bigg). \qquad (3)$$

Покажем равномерную сходимость ряда (3) на любом конечном промежутке $[0, a] \subset [0, \infty)$, а также убедимся, что он удовлетворяет уравнению (1) при начальных условиях (2).

Для простоты рассуждений уравнение (1) будем считать однородным. В этом случае его решение примет вид:

$$y = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{1}{S^n(s)} * T(s, x)\right)\frac{1}{S^n(s)}. \qquad (3')$$

Заметим, что $S^n(s) = P_n(s)$, то есть $S^n(s)$ является полиномом степени n. Тогда можно записать

$$\frac{1}{S^n(s)} = \frac{1}{(S - s_1)(S - s_2) \dots (S - s_n)},$$

где $s_1 s_2, \dots, s_n$ — корни полинома $S^n(s)$.

В силу того, что в пространстве K'_+ операция умножения определена как свертка обобщенных функций, имеем

$$\frac{1}{S^n(s)} = \frac{1}{S - s_1} * \frac{1}{S - s_2} * \dots * \frac{1}{S - s_n}.$$

Последнее выражение реализуется в функциях аргумента x следующим образом (см. [4]):

$$\frac{1}{S^n(s)} = \begin{cases} l^{s_1 x} * l^{s_2 x} * \dots * l^{s_n x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

или

$$\frac{1}{S^n(s)} = \begin{cases} \int\limits_0^x \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \dots \int\limits_0^{t_{n-2}} l^{s_1 t_{n-2}} l^{s_2(t_{n-3} - t_{n-2})} \dots l^{s_n(x-t)} \, dt_{n-2} \dots dt_1 dt = \psi(x), & x \geqslant 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

После выполнения соответствующих операций ряд (3′) примет вид:

$$y = \psi(x) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int\limits_0^x \psi(x - t) F_\kappa(t)\, dt, \qquad (4)$$

где

$$F_\kappa = \int_0^x F_{\kappa-1}(t) \sum_{\alpha=0}^{n-1} p_{n-1-\alpha}\, g_{n-1-\alpha}(t)\, \psi^{(\alpha)}(x-t)\, dt,$$

$$F_1 = p_0 g_0(x)\, \psi^{(n-1)}(x) + p_1 g_1(x)\, \psi^{(n-2)}(x) + \ldots + p_{n-1} g_{n-1}(x)\, \psi(x)$$

и

$$p_i = 0{,}1 \text{ при } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \ (p_i = 0, \text{ если } g_i(x) = \mathrm{const}).$$

Произведем оценку для ряда (4). Из условия бесконечной дифференцируемости коэффициентов $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x)$ уравнения (1) следует их ограниченность на любом конечном промежутке $[0, a] \subset [0, \infty)$. Функция $\psi(x)$ в силу ее определения будет также бесконечно дифференцируемой функцией и ограниченной на любом конечном промежутке вместе со всеми своими производными. Учитывая это, положим

$$M = \max_{x \in [0,a]} \{ |p_0 g_0(x)|, |p_1 g_1(x)|, \ldots, |p_{n-1} g_{n-1}(x)| \}$$

и

$$A = p_0 A_0 + p_1 A_1 + \ldots + p_{n-1} A_{n-1}, \quad A_i = \max_{x \in [0,a]} |\psi^{(i)}(x)|, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Имеем

$$|F_1(x)| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n-1} |p_{n-1-\alpha}\, g_{n-1-\alpha}(x)|\, |\psi^{(\alpha)}(x)| \leqslant M \sum_{\alpha=0}^{n-1} p_\alpha |\psi^{(\alpha)}(x)| \leqslant MA.$$

$$|F_2(x)| \leqslant \int_0^x |F_1(t)| \sum_{\alpha=0}^{n-1} |p_{n-1-\alpha}\, g_{n-1-\alpha}(t)|\, |\psi^{(\alpha)}(x-t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M^2 A^2 \int_0^x dt = M^2 A^2 \frac{x}{1!}$$

. . . .

$$|F_\kappa(x)| \leqslant \int_0^x |F_{\kappa-1}(t)| \sum_{\alpha=0}^{n-1} p_{n-1-\alpha}\, g_{n-1-\alpha}(t)\, |\, |\psi^{(\alpha)}(x-t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M^\kappa A^\kappa \int_0^x \frac{t^{\kappa-2}}{(\kappa-2)!}\, dt = M^\kappa A^\kappa \frac{x^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}.$$

Справедливость последнего равенства для произвольного κ, $\kappa = 2, 3, \ldots$, легко доказывается методом математической индукции. Общая оценка (3′) будет иметь вид:

$$|\psi(x) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \psi(x-t) F_\kappa(t)\, dt| \leqslant |\psi(x)| + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x |\psi(x-t)|\, |F_\kappa(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_0 \int_0^x |F_\kappa(t)|\, dt \leqslant A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_0 M^\kappa A^\kappa \int_0^x \frac{t^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\, dt = A_0 +$$

$$+ \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_0 M^\kappa A^\kappa \frac{x^\kappa}{\kappa!} \leqslant \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_0 M^\kappa A^\kappa \frac{a^\kappa}{\kappa!}.$$

Следовательно, ряд (3′) сходится в пространстве обобщенных функций и равномерно сходится на любом конечном промежутке $[0, a] \subset [0, \infty)$. Кроме того, очевидно, что ряд (3′) допускает почленное дифференцирование любое число раз в рассматриваемой области. Непосредственно подстановкой убеждаемся, что ряд (3′) удовлетворяет уравнению (1) (при $f(x) \equiv 0$), а также начальным условиям (2), т. е. он и является искомым решением.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (1) неоднородно. Решением в этом случае является ряд (3), который можно записывать в виде

$$y = \psi(x) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \psi(x-t) F_\kappa(t)\, dt + \omega(x) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \omega(x-t) G_\kappa(t)\, dt,$$

где

$\psi(x)$ и $F_\kappa(x)$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ — функции, определенные нами выше;

$$\omega(x) = \int_0^x \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_n)\, l^{s_1(t_{n-1}-t_n)} \cdots l^{s_n(x-t)}\, dt_{n-1} \cdots dt_1 dt,$$

а $G_1(x)$ и $G_\kappa(x)$, $\kappa = 2, 3, \ldots$, имеют вид:

$$G_1(x) = p_0 g_0(x)\, \omega^{(n-1)}(x) + p_1 g_1(x)\, \omega^{(n-2)}(x) + \ldots + p_{n-1} g_{n-1}(x)\, \omega(x),$$

$$G_\kappa(x) = \int_0^x \omega(x-t)\, G_{\kappa-1}(t)\, dt,$$

где

$$p_i = 0{,}1 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Сходимость ряда

$$\omega(x) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \omega(x-t)\, G_\kappa(t)\, dt$$

устанавливается совершенно аналогично тому, как это мы делали для ряда (3′). При этом имеет место следующее неравенство:

$$\left| \omega(x) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \omega(x-t)\, G_\kappa(t)\, dt \right| \leqslant B_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} M^\kappa B^\kappa \frac{a^\kappa}{\kappa!},$$

где

$$M = \max_{x \in [0, a]} \{ |p_0 g_0(x)|, |p_1 g_1(x)|, \ldots, |p_{n-1} g_{n-1}(x)| \}$$

и

$$B = p_0 B_0 + p_1 B_1 + \ldots + p_{n-1} B_{n-1}; \quad B_i = \max_{x \in [0, a]} |\omega^{(i)}(x)| \, (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Таким образом, мы убедились, что ряд (3) является решением неоднородного дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего условию (2).

Замечание. Нетрудно убедиться, что все наши рассуждения относительно уравнения (1) будут справедливы, если его коэффициенты $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x)$ полагать лишь непрерывными функциями и не требовать их бесконечной дифференцируемости.

3. Пример. Рассмотрим уравнение из [5]:

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)\, y = 0 \tag{5}$$

при следующих начальных условиях

$$y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \tag{6}$$

Уравнение (5) с учетом условий (6) запишется в операторной форме следующим образом

$$[S^2 - T(s,x)]\, y = \delta(x),$$

где

$$T(s,x) = 4xS - (4x-2).$$

Решение в этом случае будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^2} * \left[T(s,\,x)\left(\frac{1}{S^2}\right)\right] + \frac{1}{S^2} * \left[T(s,\,x)\left(\frac{1}{S^2} * \left[T(s,\,x)\left(\frac{1}{S^2}\right)\right]\right)\right] + \ldots \tag{7}$$

Произведя в (7) почленно соответствующие операции, мы получим последовательность приближенных решений:

$$y_0 = x_0 + R_0, \qquad R_0 = 0,$$

$$y_1 = x + \frac{x^3}{1!} + R_1, \qquad R_1 = \frac{1}{5}x^5,$$

$$y_2 = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + R_2, \qquad R_2 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{90}x^9,$$

. . . .

$$y_m = \sum_{\kappa=0}^{m} \frac{x^{2\kappa+1}}{\kappa!} + R_m = x\sum_{\kappa=0}^{m}\frac{x^{2\kappa}}{\kappa!} + R_m,$$

где R_m — полином, содержащий m членов со всеми нечетными степенями от $2m+3$ до $4m+1$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $m \to \infty$ и обозначая $R_\infty = \lim\limits_{m\to\infty} R_m$, имеем:

$$\lim_{m\to\infty} R_m = x l^{x^2} + R_\infty.$$

Далее мы замечаем, что xl^{x^2} удовлетворяет уравнению (1) при условиях (2). Следовательно, R_∞ в силу теоремы единственности тождественно равняется нулю.

Таким образом, аналитическое решение уравнения (1) при условиях (2) имеет вид

$$y = xl^{x^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции. В1, М., 1958.
2. В. А. Диткин, П. И. Кузнецов. Справочник по операционному исчислению, 1951.
3. Р. М. Малаховская. Ученые записки ТГУ, № 36, стр. 13—32, 1960.
4. Р. М. Малаховская. Труды ТГУ, т. 163, стр. 28—43, 1963.
5. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, 1961.