ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 171 1969

РАЗВИТИЕ ПРОБЛЕМЫ Э. КРУППА

В. А. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

(Представлена кафедрой начертательной геометрии)

За последнее время большое внимание в СССР стали уделять исследованию так называемой проблемы Э. Круппа [1]. В связи с тем, что появился ряд работ с различными уточнениями доказательства предложения Э. Круппа, то возникла потребность сделать соответствующий анализ наиболее интересных из них. Этому вопросу и посвящается настоящая статья.

Проблема Э. Круппа касается основного предложения аксонометрии, т. е. решения вопроса о возможности данной системы координат D' иметь данное изображение D в центральной проекции.

Известно, что в случае параллельного проектирования это задание решает теорема Польке-Шварца.

При центральном проектировании вопрос усложняется, так как здесь инвариантом преобразования будет сложное отношение четырех точек на прямой. Если на оси OX даны точки O, A, A_1 соответственные изображения точек O', A', A'_1, то точку N, также являющуюся центральной проекцией точки N', можно определить из условий:

$$\frac{OA_1}{A_1A} : \frac{ON}{NA} = \frac{O'A_1'}{A_1'A'} : \frac{O'N'}{N'A'}.$$

Таким образом, при наличии координатных осей с двумя ранее указанными отрезками на каждой из них при центральном проектировании можно получить наперед заданный плоский образ, являющийся, по сути дела, плоской дезарговой конфигурацией. Отсюда основная проблема центральной аксонометрии формулируется следующим предложением.

Если имеется произвольная ранее заданная плоская дезаргова конфигурация $D \equiv O\,(AA_1, BB_1, CC_1)$, то ее можно считать как центральную проекцию произвольной наперед заданной пространственной дезарговой конфигурации $D' \equiv O'\,(A'A_1', B'B_1', C'C_1')$, и, наоборот, имея такую пространственную конфигурацию, можно так установить центральное проектирование, что получим плоскую дезаргову конфигурацию унимодулярно-аффинную*) ранее заданной.

Эрвин Круппа в 1910 г. [1] решил поставленную задачу для центральной аксонометрии.

Его первая теорема гласит:

*) Афинное преобразование, сохраняющее неизменными площади всех фигур.

«Для того, чтобы данная плоская дезаргова конфигурация являлась центральной проекцией некоторого равнобедренного прямоугольного тетраэдра, необходимо и достаточно, чтобы коническое сечение **) $K_{и}^{2}$ являлось окружностью (мнимой)».

Надо заметить, что в работе Круппа большую роль играют K-системы (по имени Круппа), составленные из треугольника, точки, прямой и конического сечения.

Доказательство этой теоремы самим Круппа оказалось весьма сложным, поскольку было основано на свойствах минимальных конусов

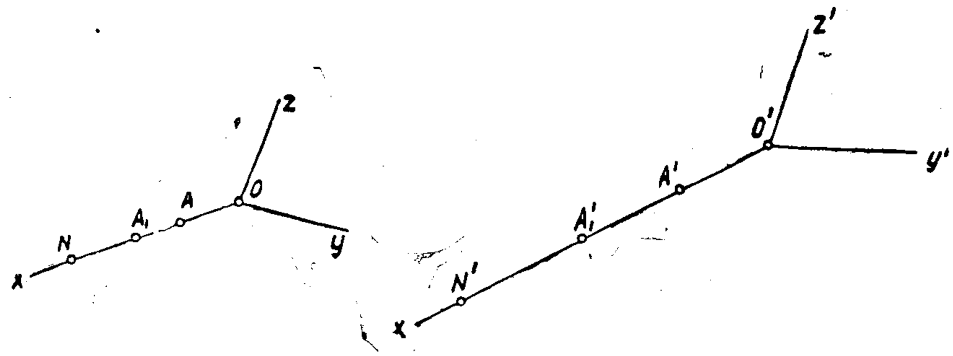

Рис. 1.

и мнимых окружностей. Поэтому в 1945 г. Н. Ф. Четверухин [3] предложил довольно элементарное доказательство 1-й теоремы Круппа, основанное на полярном соответствии.

Однако эта теорема не может служить естественным обобщением теоремы Польке-Шварца в случае центрального проектирования, так как накладывает слишком много условий, в то время как теорема Польке-Шварца без всяких условий дает возможность получить из данного оригинала проекцию, подобную наперед заданной фигуре.

В связи с этим возникла вторая теорема Круппа:

«Если дана произвольная пространственная дезаргова конфигурация D' и произвольная плоская дезаргова конфигурация D^0, то можно так выбрать центр проектирования S и плоскость проекции π_0, чтобы проекцией D' служила конфигурация D, коллинеарная D^0».

Н. М. Бескин [4] доказал эту теорему проективно-аналитическим путем более уточненно, считая, что пространственная дезаргова конфигурация D' может спроектироваться в плоскую конфигурацию D унимодулярно-аффинную D^0.

Следует заметить, что доказательство Н. М. Бескина не имеет достаточной наглядности и довольно сложно, а поэтому в дальнейшем были предложены еще другие доказательства.

В 1949 г. доцент Е. А. Мчедлешвили в своей работе [5] в поисках элементарного доказательства использовал «проективные соответствия пространства и расплющенного пространства или плоскости проекций».

Он сформулировал основную теорему центральных изображений таким образом:

«Если дана пространственная дезаргова конфигурация $D' \equiv \equiv O'(A'A_1', B'B_1', C'C_1')$, а также плоская дезаргова конфигурация $D \equiv O(AA_1, BB_1, CC_1)$ так, что треугольники, образуемые точками по проективным соответствиям прямолинейных рядов $(O'A'A_1' \overline{\wedge} \overline{OAA_1})$;

**) Здесь коническое сечение введено на основании теоремы Шура [2].

$(O'B'B_1' \overline{\wedge}\, \overline{O}\overline{B}\overline{B}_1)$; $(O'C'C_1' \overline{\wedge}\, \overline{O}\overline{C}\overline{C}_1)$ подобны, то тогда данная плоская дезаргова конфигурация является центральной проекцией пространственной дезарговой конфигурации“.

Несмотря на сравнительную краткость доказательства, автор излагает его недостаточно ясным языком, вводя понятие о «расплющенном пространстве», которое рассматривает как «плоскость плоской дезарговой конфигурации».

Сам Е. А. Мчедлешвили отмечает, что из-за сосредоточения «внимания на дезарговых конфигурациях ускользает настоящая суть этой теоремы» (стр. 178).

5 апреля 1950 года И. И. Котов на заседании кафедры начертательной геометрии Московского авиационного института сделал доклад «Об одном виде центральной аксонометрии», материалы которого были опубликованы в 1951 г. [6]. Автор, рассматривая центральную проекцию прямоугольной системы координат на аксонометрическую плоскость, приходит к выводу, что теорему центральной аксонометрии можно формулировать несколько иначе:

«Треугольник следов комбинированного изображения пространственной системы координат в центральной проекции гомотетичен треугольнику линий схода ее координатных плоскостей при центре гомотетии, представляющем собой центральную проекцию начала координат».

Чтобы понять эту теорему, автор предлагает рассмотреть следующее построение (рис. 2).

В пространстве имеется прямоугольная система координат $O'x'y'z'$ и плоскость аксонометрических проекций π, пересекающая оси координат в точках x_π', y_π', z_π'.

Если дан центр проектирования S, то из него можно спроектировать на пл. π данную систему осей. Тогда получим тройку пря-

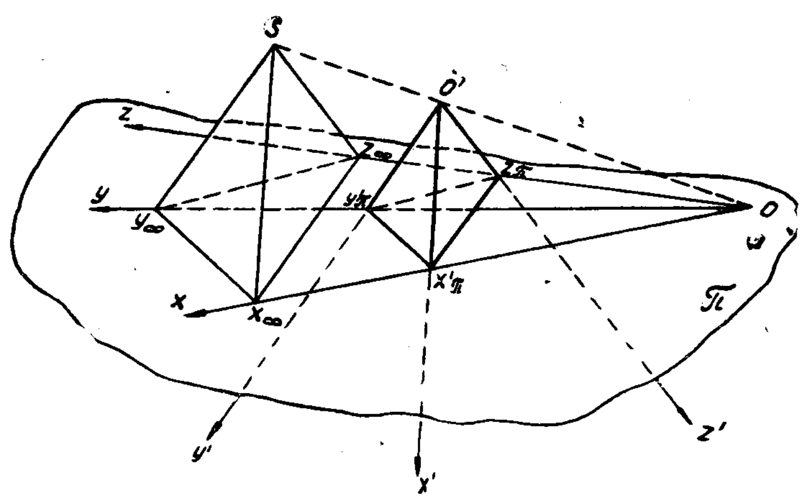

Рис. 2.

мых x, y, z, пересекающихся в точке O и являющихся проекциями осей x', y', z' и начала координат O'.

Дополним полученный чертеж несобственными элементами, для чего через центр проектирования S проведем плоскости, параллельные данным координатным плоскостям $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. В результате будем иметь на плоскости проекций линии схода $x_\infty y_\infty$, $x_\infty z_\infty$, $y_\infty z_\infty$ указанных координатных плоскостей.

Получатся два треугольника: треугольник линий схода $x_\infty y_\infty z_\infty$ и треугольник следов $x'_\pi y'_\pi z'_\pi$ как сечения двух равных трехгранных углов $Sx_\infty y_\infty z_\infty$ и $O'x'y'z'$ плоскостью π. Они представляют собой фактически гомотетичные фигуры с центром гомотетии в точке O.

Исходя из этой теоремы автор доказывает ей обратную, называя ее теоремой существования центральных проекций:

«Любые два гомотетичных остроугольных треугольника с их центром гомотетии всегда можно рассматривать как комбинированное изображение прямоугольной системы координат в центральных проекциях, дополненное проекциями бесконечно удаленных прямых координатных плоскостей» (рис. 3).

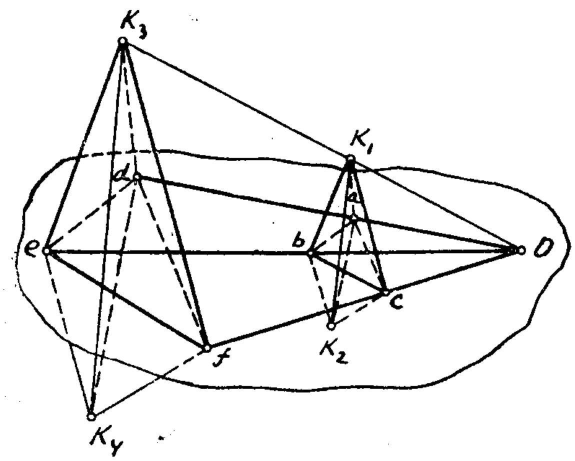

Рис. 3.

Дано: треугольники abc, def и центр гомотетии точка O в плоскости π.

Требуется доказать, что od, oe и of — центральные проекции координатных осей.

Доказательство. Над каждым треугольником надстроим по обе стороны плоскости π по два симметрично расположенных прямоугольных трехгранных угла.

Соединим между собой вершины этих углов прямыми K_1K_3 и K_2K_4, которые, будучи симметричными относительно плоскости π, пересекутся в точке O.

Следовательно, гомотетичные остроугольные треугольники abc и def с центром гомотетии O определяют в пространстве четыре прямоугольных трехгранных угла K_1abc, K_2abc, K_3def, K_4def и любой из них можно принять за координатный триэдр, у которого вершина трехгранного угла, расположенного по ту же сторону от плоскости π, может быть центром проектирования.

Если один из гомотетичных треугольников считать треугольником следов пространственной системы координат, то тогда будут два возможных расположения ее и центра проектирования.

Как известно, задание в плоскости изображений дезарговой конфигурации $D \equiv (Ox'_\pi y'_\pi z'_\pi x_\infty y_\infty z_\infty)$ с бесконечно удаленной дезарговой прямой определяет на плокости π положение пространственной системы координат $O'x'y'z'$ и центра проектирования S. В таком случае вопрос о построении центральной аксонометрии фигуры по декартовым координатам ее характерных точек становится вполне разрешимым в данной плоскости.

Рассмотрим следующий пример (рис. 4).

Допустим, что некоторая точка A' фигуры F' имеет абсциссу в виде отрезка $O'a'_{x_1}$. Совместим $\Delta O'x'_\pi O$ и центр проектирования S с плоскостью π. Получим $\Delta O_x x'_\pi O$ и точку S_x, а также совмещенное положение $O_x a'_{x'\pi}$ отрезка $O'a'_{x'}$. Таким образом, на пл. π имеем центральную проекцию отрезка $O'a'_{x'}$, представленную в виде отрезка Oa_x при проектировании из совмещения центра S_x отрезка $O_x a'_{x'\pi}$. Построение совмещенных треугольников не представляет затруднений, так как натуральные величины отрезков OO' и $x'_\pi O$ легко находятся как гипотенузы прямоугольных треугольников $O'O_1O$ и $x'_\pi O_1O'$, где O_1 — ортогональная проекция точки O' на пл. π.

Катеты O_1O и $x'_\pi O_1$ заданы на плоскости изображений, а O_1O' определяется как отрезок, средний пропорциональный к отрезкам $x'_\pi O_1$ и O_1c. S_x определяется как пересечение прямой, параллельной $x'_\pi O_x$, проходящей через x_∞, с прямой OO_x.

И. И. Котов далее находит перспективу некоторой точки пространства и рекомендует решение задачи провести по разработанной им схеме [6, стр. 150].

После этого переходит к построению изображений любой фигуры, заданной декартовыми координатами ее характерных точек. Во избежание загромождения чертежа излишними линиями автор считает целесообразнее построение координатных отрезков O_{a_x}, O_{a_y} и O_{a_z} проводить отдельно, а на основном чертеже выполнять лищь построение координатных ломаных перспективных изображений соответствующих точек фигуры.

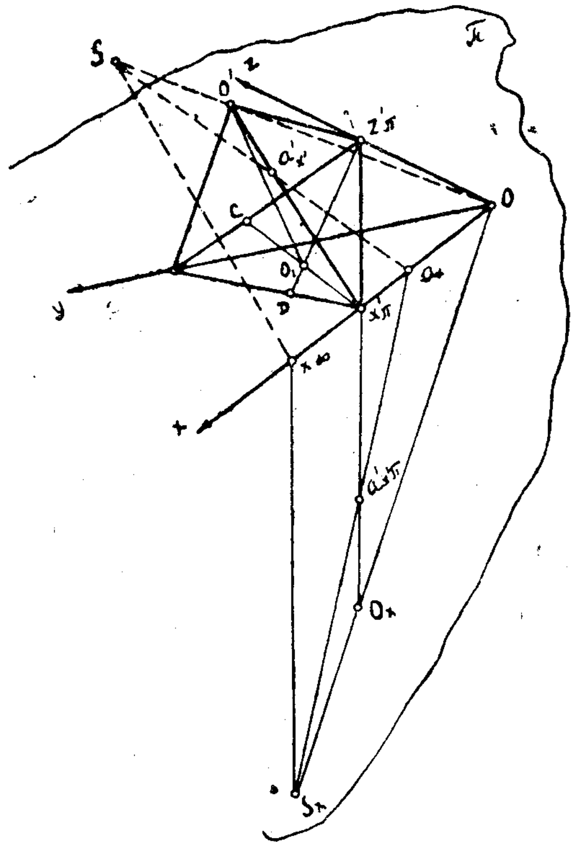

Рис. 4.

В дальнейшем И. И. Котов предлагает накладывать определенные условия, выбирая центр проектирования только на прямой O_1O' (рис. 4).

В этом случае центральная аксонометрия будет иметь свойства, как и в ортогональной аксонометрии (рис. 5), т. е.

а) начало системы координат спроектируется внутри треугольника следов $x'_\pi y'_\pi z'_\pi$, совпав с его ортоцентром;

б) аксонометрические оси x, y, z будут проходить через ортоцентр и вершины треугольников следов $x'_\pi y'_\pi z'_\pi$ и линий схода $x_\infty y_\infty z_\infty$;

в) углы между осями будут только тупые.

Такого вида аксонометрическую проекцию, заданную конфигурацией $D \equiv (Ox'_\pi y'_\pi z'_\pi\ x_\infty y_\infty z_\infty)$, автор предлагает называть нормальной (по аналогии с прямоугольной аксонометрией).

И. И. Котов провел исследования на построение центральной аксонометрии и сделал вывод, что если имеются две конгруентные шкалы на аксонометрических осях, то аксонометрию такого вида следует называть нормальной или центральной диметрией, а с тремя конгруентными шкалами — нормальной или центральной изометрией.

Автор детально рассмотрел вопрос о построении нормальной центральной диметрии, если аксонометрическая плоскость π параллельна оси z'.

В качестве примера он привел рисунок башни из миниатюры русской рукописи конца XV века (рис. 6), считая, что такой вид изображения является типичным для того времени, а поэтому его можно было бы назвать русской диметрией.

По нашему мнению, такое название весьма относительно, так как русские художники, преимущественно иконописцы, не придерживались

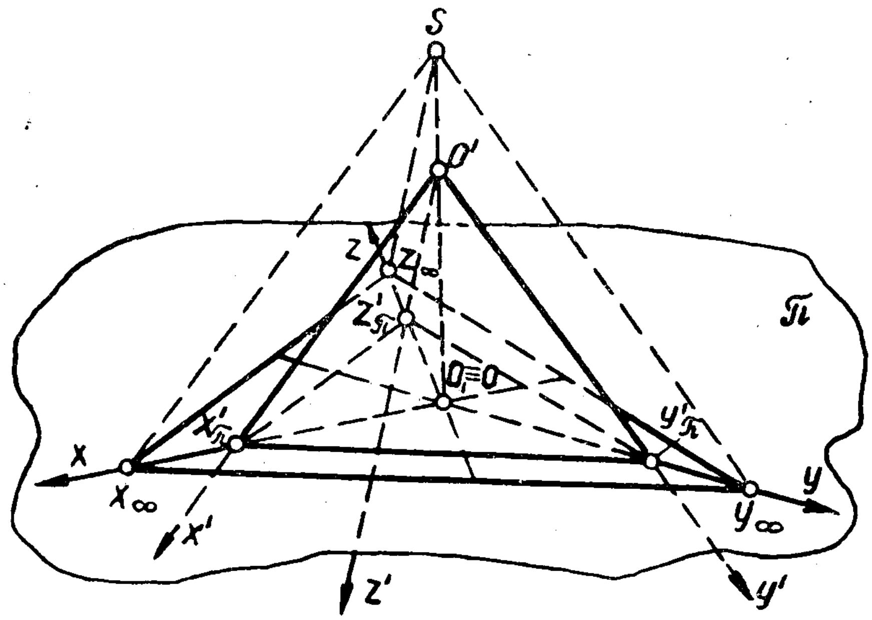

Рис. 5.

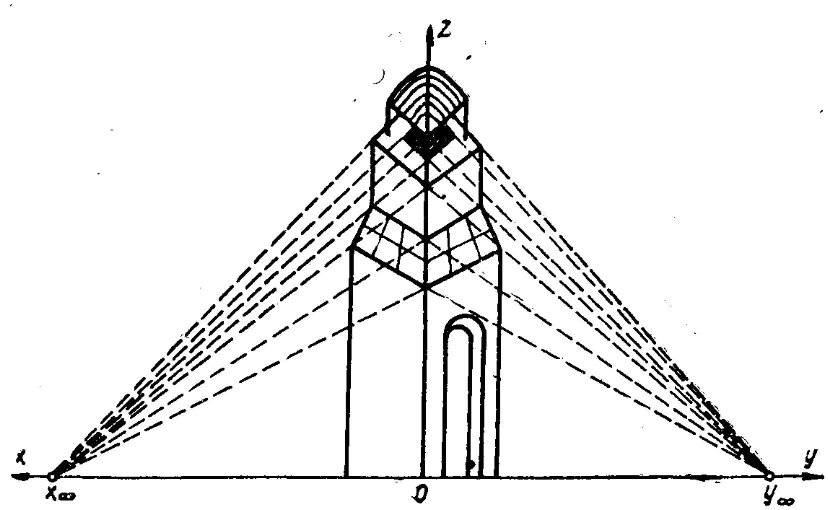

Рис. 6.

никаких метрических измерений и не строили каких бы то ни было конгруентных шкал.

И. И. Котов своими теоретическими разработками и их практическими премененнями в области центральной аксонометрии показал, что ее частные виды — нормальная центральная изометрия и диметрия, кроме наглядности изображения, обладают всеми преимуществами ортогонального аксонометрического проектирования и, прежде всего, достаточной простотой и аналогичностью приемов изображений.

В этом, бесспорно, большая заслуга профессора И. И. Котова.

В 1954 г. И. С. Джапаридзе [7] доказал проективно-синтетическим путем известную теорему Н. М. Бескина [2, 4] и, по нашему мнению, это доказательство оказывается более простым.

Наконец, в 1956 г. О. Я. Рюнк [8] написал работу, где отметил, что наиболее целесообразное обобщение 2-й теоремы Круппа было сделано Н. М. Бескиным, но вследствие замены масштабного тетраэдра на дезаргову конфигурацию исчезло аксенометрическое содержание, поскольку определение каждой координаты через двойное отношение связано с очень большим количеством вычислений, что для практических целей непригодно.

В связи с этим возник вопрос о выборе такой фигуры, которая по форме была бы близка к тетраэдру.

О. Я. Рюнк предложил такой фигурой считать совокупность вершин тетраэдра с несобственной точкой одного масштабного ребра. Полученная плоская фигура из 5 точек, три из которых лежат на одной прямой, является центральной проекцией такого объекта.

Основная теорема центральной аксонометрии по О. Я. Рюнк получалась следующего содержания:

«Перспектива масштабного тетраэдра ортогональной равномасштабной системы координат вместе с точкой схода одной координатной оси определяет положение осей и центра проекций относительно картинной плоскости».

Если сравнить теорему И. И. Котова с только что приведенной, то можно заметить некоторое сходство, а именно: О. Я. Рюнк для того, чтобы определить положение координатных осей и центра проекций (точнее — центра проектирования — В. В.), на картинной плоскости использует несобственную точку одной координатной оси. У И. И. Котова говорится о дополнении проекциями несобственных прямых координатных плоскостей.

Далее следует отметить, что О. Я. Рюнк, так же как и И. И. Котов, показал практическое использование центральной аксонометрии. Для этой цели он, прежде всего, решил применить центральную аксонометрию, аналогичную ортогональной изометрии.

В этом случае, координатный трехосник должен быть изоклинным, т. е. равнонаклонным к картинной плоскости [9].

Применение метода координат к решению задач в центральных проекциях продемонстрировал в своей работе С. М. Дешевой [10]. Им были рассмотрены задачи на построение центральной проекции точки в пространстве, плоской фигуры заданных размеров, на определение истинной величины углов между основными геометрическими элементами и расстояниями между ними.

Трудность выполнения таких примеров заключается в сложности построений, когда целый ряд вспомогательных графических операций накладывается на основной чертеж.

В 1959 г. в работах Н. В. Палувер [11, 12] были исследованы некоторые основные вопросы центральной аксонометрии и, в частности, рассмотрена задача о том, по каким данным изображения пространственной равномасштабной системы координат с несобственными точками на ее осях можно определить положение центра проектирования и масштабного тетраэдра относительно плоскости проекций.

Подводя итоги сказанному, можно сделать следующие выводы:

1. Со времени появления теоремы Э. Круппа начался так называемый четвертый период в развитии теоремы Польке. Напомним, что Н. М. Бескин [2] предложил разделить историю совершенствования основной теоремы аксонометрии на четыре периода: первый — с 1853 г. по 1864 г., когда отсутствовали ее элементарные доказательства; второй — с 1864 г. по 1885 г. — период обобщения теоремы Г. Шварцем

с метрической системы координат на аффинную; третий — с 1885 г. по 1910 г., когда Ф. Шур теореме Польке-Шварца придал проективный характер; четвертый — с 1910 г. до настоящего времени. Какими работами характеризуется этот период, можно судить по данной обобщающей статье.

Как видно, наибольший интерес к соответствующим исследованиям появился спустя 35 лет после опубликования теоремы Э. Круппа. Последнее объясняется тем, что к этому времени была разработана Четверухиным теория полных и неполных изображений, которая подготовила почву для дальнейших исследований не только в области параллельной аксонометрии, но и центральной.

2. Из доказательств основного предложения аксонометрии следует наиболее полным считать доказательство Н. М. Бескина [2, 4], уточнившего вторую теорему Э. Круппа до унимодулярно-аффинного соответствия.

Последующие работы: Е. А. Мчедлешвили, И. С. Джапаридзе, И. И. Котова и др. сводятся к попыткам придать доказательствам графическую наглядность и простоту объяснений.

3. Анализируя сочинения вышеупомянутых авторов, следует отметить, что наиболее удачными (на наш взгляд) являются работы И. И. Котова [6] и И. С. Джапаридзе [7], причем у И. И. Котова рассмотрено непосредственное приложение теории к практике.

Эта же мысль получила в дальнейшем развитие в трудах О. Я. Рюнк [8, 9], С. М. Дешевого [10] и др.

4. Теоретических исследований и практических применений центральной аксонометрии, по сравнению с аналогичными вопросами в ортогональных аксонометрических проекциях, не так уже много. Причинами этого являются (на наш взгляд) исчезновение сущности теоремы, вследствие большого внимания дезарговым конфигурациям и некоторая сложность графического выполнения при решении метрических задач.

5. Упомянутые обстоятельства не умаляют значения основной проблемы центральной аксонометрии, которая получила свое дальнейшее развитие в многомерном пространстве, свидетельством чего может служить статья В. Н. Первиковой [13].

В упоминавшейся выше работе И. И. Котова [6] говорится, что исследования свойств центрального проектирования в многомерном пространстве можно свести к исследованию параллельного проектирования в n-мерном пространстве на трехмерную картинную плоскость с последующим рассмотрением обычной центральной проекции трехмерного пространства (стр. 79).

6. Таким образом, вопрос о дальнейшем развитии проблемы Э. Круппа будет иметь большое значение как в смысле усовершенствования теоретических доказательств, так и в методах применения их для практических целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Kruppa. Zur axonometrische Methode der darstellenden Geometrie (Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematischnaturwissenschaftliche Klasse. Abt. IIa, Bd 119, Heft 4. Wien. 1910. S 487—506).

2. Н. М. Бескин. Основное предложение аксонометрии (Вопросы современной начертательной геометрии под редакцией Н. Ф. Четверухина, Гостехиздат, 1947).

3. Н. Ф. Четверухин. Об основной теореме аксонометрии в центральной проекции. (Доклады АН СССР, Новая серия, том L, 1945).

4. Н. М. Бескин. Аналог теоремы Польке-Шварца в центральной аксонометрии. (Доклады АН СССР, Новая серия, том L, 1945).

5. Е. А. Мчедлешвили. Проективные основания начертательной геометрии. (Труды Грузинского политехнического института, № 19, Тбилиси, 1949).

6. И. И. Котов. Комбинированные изображения. МАИ, 1951.

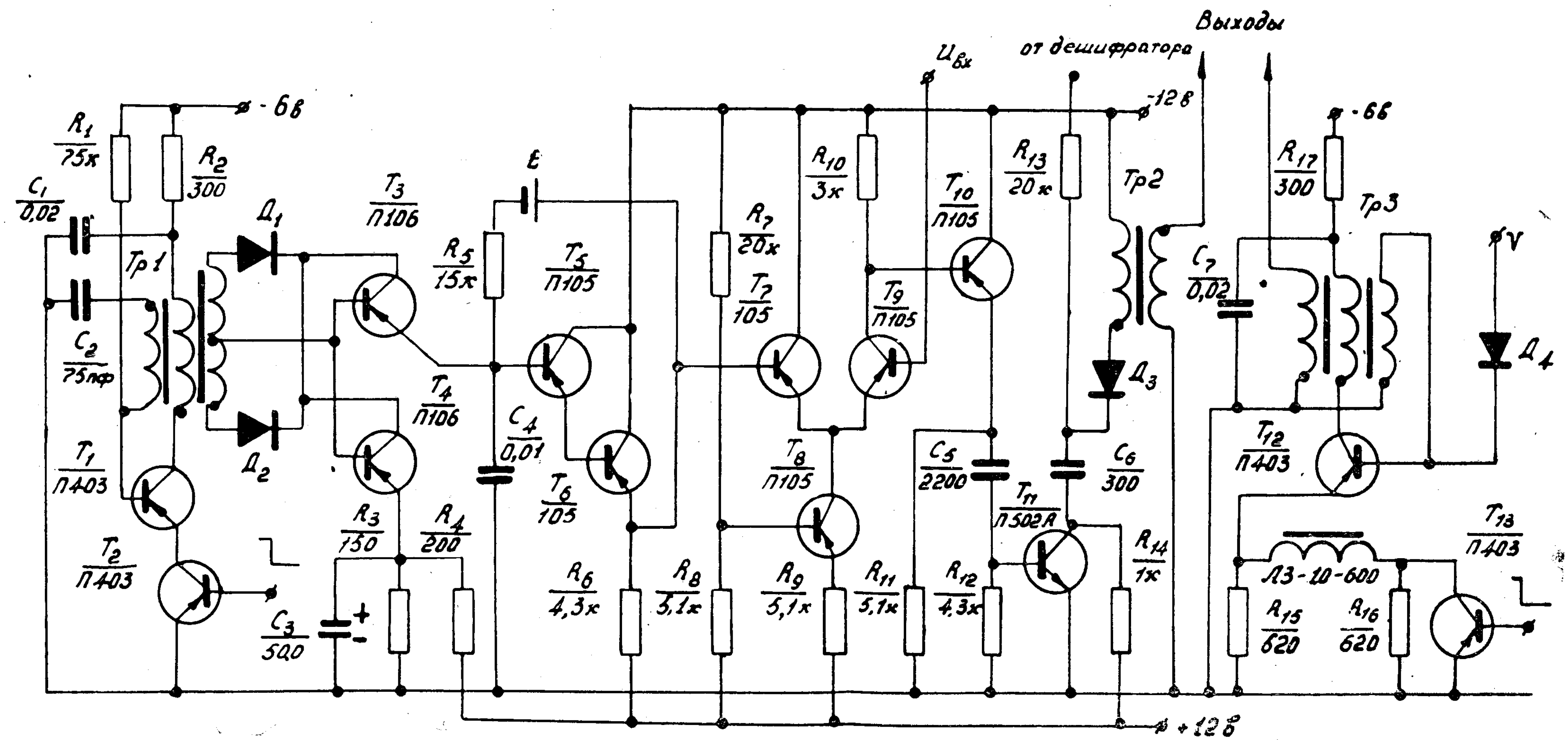

Рис. 1. Принципиальная схема основных узлов преобразователя

7. И. С. Джапаридзе. Проективно-синтетическое доказательство предложения Н. М. Бескина (Труды Грузинского политехнического института, № 30, 1954).

8. О. Я. Рюнк. Фундаментальная задача аксонометрии в центральной проекции. Диссертация. Таллин, 1956.

9. О. Я. Рюнк. О применении центральной аксонометрии на практике (Вопросы теории, приложений и методики преподавания начертательной геометрии, Рига, 1960).

10. С. М. Дешевой. Приложение метода координат к решению метрических задач в центральных проекциях. (Сборник научных трудов № 13 Ленинградского механического института, Ленинград, 1959).

11. Н. В. Палувер. Исследование некоторых основных вопросов центральной аксонометрии. Диссертация, Таллин, 1959.

12. Н. В. Палувер. Об аналитическом решении проблемы Круппа в центральной аксонометрии. (Вопросы теории, приложений и методики преподавания нач. геометрии, Рига, 1960).

13. В. Н. Певикова. Обобщение основной теоремы центральной аксонометрии на пространство n-измерений (Методы начерт. геометрии и ее приложения, М., 1955).