ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 108 *ИССЛЕДОВАНИЕ БУРИЛЬНЫХ МАШИН* *1959*

К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГЛОТИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ К МАШИНАМ УДАРНОГО ДЕЙСТВИЯ

П. М. Алабужев, В. И. Копытов

Задача о колебаниях корпуса молотка (отбойного, бурильного и др. типов) с присоединенным динамическим поглотителем при некоторых допущениях сводится к задаче о колебаниях си-

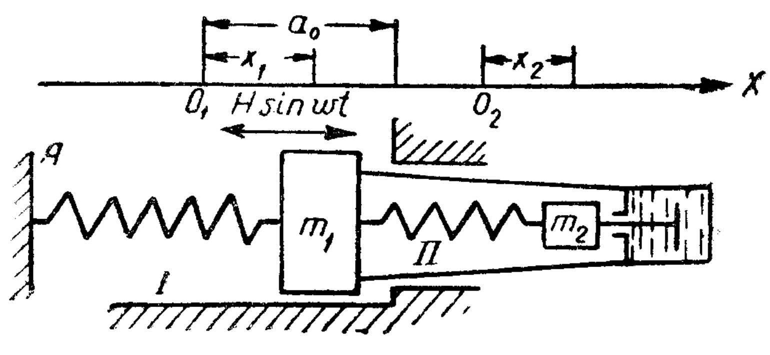

Рис. 1. Принципиальная схема механической системы с динамическим поглотителем колебаний.

стемы «упругая связь — масса — ограничитель» с двумя степенями свободы.

В работе [1] исследованы колебания подобной механической системы без учета сил сопротивления. В настоящей статье приводится решение указанной выше задачи с учетом сил сопротивления движению присоединенной массы. При этом мы ограничились рассмотрением случая, когда силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости [2, 3, 5].

Рассмотрим механическую колебательную систему, состоящую из двух масс m_1 и m_2, соединенную между собой пружиной II (упругой связи) (рис. 1). Масса m_1 с помощью пружины прикреплена к неподвижной точке A. К массе m_1, кроме того, прикреплен цилиндр с некоторой вязкой жидкостью. В цилиндре с жидкостью перемещается поршень, соединенный с массой m_2. Силы сопротивления жидкости, развивающиеся во время движения поршня, а следовательно, и массы m_2, будем считать пропорциональными первой степени скорости движения поршня относительно цилиндра.

Исследуем вынужденные колебания масс m_1 и m_2, если масса m_1 имеет неподвижный жесткий ограничитель колебаний. Возмущающая сила, действующая на массу m_1, изменяется по закону $H\sin\omega t$

Решение задачи будем искать при следующих допущениях: удар массы m_1 об ограничитель неупругий, силы упругости в пружинах I и II изменяются по линейному закону.

Дифференциальные уравнения движения системы запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 - \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F(x_1) - c_2(x_2 - x_1) - H\sin\omega t = 0;\\ m_2\ddot{x}_2 + \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(x_2 - x_1) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где x_1 — перемещение массы m_1 относительно положения нерастянутой I пружины, точка O_1;

x_2 — перемещение массы m_2 относительно положения нерастянутой II пружины, точка O_2;

$F(x_1)$ — сила упругости I пружины;

$\alpha(x_2 - x_1)$ — сила сопротивления, развивающаяся при движении массы m_2;

α — коэффициент пропорциональности (сопротивления);

c_2 — коэффициент жесткости II пружины.

Вынужденные колебания в первом приближении метода акад. Б. Г. Галеркина [1] будем искать в виде синусоидальных функций, имеющих ту же частоту, что и возмущающая сила, но сдвинутых относительно силы по фазе:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = A + a_1\sin(\omega t - \gamma_1);\\ x_2 = B + a_2\sin(\omega t - \gamma_2). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Здесь A и B есть некоторые величины, не зависящие от времени t.

Подставим значения x_1, x_2 и их производных в уравнения (1). Умножим полученные выражения на первые вариации δx_1 и δx_2 и проинтегрируем сумму этих выражений по t от 0 до $\frac{2\pi}{\omega}$. В силу независимости вариаций δA, δB, δa_1; δa_2; $\delta\gamma_1$ и $\delta\gamma_2$ получим систему шести уравнений для определения шести величин A; B; a_1; a_2; γ_1; γ_2:

$$\left.\begin{aligned}
&c_2(B-A)=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}F\left[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)\right]dt;\\
&m_1\omega^2 a_1+\alpha\omega\, a_2\sin(\gamma_2-\gamma_1)+c_2a_2\cos(\gamma_2-\gamma_1)-c_1a_1+H\cos\gamma_1=\\
&=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}F\left[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)\right]\sin(\omega t-\gamma_1)\,dt;\\
&-\alpha\omega\, a_1+\alpha\omega\, a_2\cos(\gamma_2-\gamma_1)-c_2a_2\sin(\gamma_2-\gamma_1)+H\sin\gamma_1=\\
&=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}F\left[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)\right]\cos(\omega t-\gamma_1)\,dt;\\
&c_2(B-A)=0;\\
&-m_2\omega^2a_2+\alpha\omega\, a_1\sin(\gamma_2-\gamma_1)+c_2a_2-c_2a_1\cos(\gamma_2-\gamma_1)=0;\\
&\alpha\omega\, a_2-\alpha\omega\, a_1\cos(\gamma_2-\gamma_1)-c_2a_1\sin(\gamma_2-\gamma_1)=0;
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Для вычисления интегралов, стоящих в первых трех уравнениях системы (3), необходимо задать конкретное выражение силы упругости

$$F(x_1)=F\left[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)\right].$$

Введя в рассмотрение новый параметр a_0, как расстояние от положения нерастянутой I пружины до ограничителя, силу упругости $F(x_1)$ можно записать в виде

$$F(x_1)=\begin{cases}c_1x_1 & \text{при } x_1<a_0,\\ c_1a_0 & \text{»}\quad x_1=a_0.\end{cases}\quad(4)$$

где c_1 — коэффициент жесткости I пружины.

Из условия соприкосновения массы m_1 с ограничителем имеем

$$A+a_1=a_0,\quad(5)$$

т. е. соприкосновение происходит в момент времени t_1, определяемого из уравнения

$$\omega t_1-\gamma_1=\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$t_1=\frac{\pi}{2\omega}+\frac{\gamma_1}{\omega}.\quad(6)$$

Следовательно, промежуток интегрирования по t разбивается на четыре части аналогично задаче о колебаниях двухмассовой системы без сил сопротивления [4]

$$F[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)]=\begin{cases} c_1[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)] \\ \text{при } 0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}-\sigma; \\ c_1a_0=\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\frac{\gamma_1}{\omega}-\sigma}^{\frac{\pi}{2\omega}+\frac{\gamma_1}{\omega}}\varphi\left(t-\dfrac{\pi}{2\omega}-\dfrac{\gamma_1}{\omega}+\sigma\right)dt= \\ =\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\sigma}\varphi(\tau)\,d\tau \\ \text{при } \dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}-\sigma\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}, \\ c_1a_0=\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2\omega}+\frac{\gamma_1}{\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}+\frac{\gamma_1}{\omega}+\sigma}\varphi\left(\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}+\sigma-t\right)dt \\ =\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\sigma}\varphi(\tau)\,d\tau \\ \text{при } \dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}+\sigma, \\ c_1[A+a_1\sin(\omega t-\gamma_1)] \\ \text{при } \dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\gamma_1}{\omega}+\sigma<t\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя данное выражение силы упругости в интегралы выражений (3), после вычислений, аналогичных изложенным в работах [1; 4], получим

$$\left.\begin{aligned} &c_2(B-A)=c_1A+c_1a_0; \\ &m_1\omega^2a_1-c_2a_1+\alpha\omega a_2\sin(\gamma_2-\gamma_1)+c_2a_2\cos(\gamma_2-\gamma_1)+ \\ &\quad+H\cos\gamma_1=c_1a_1+2c_1a_0; \\ &\alpha\omega a_1-\alpha\omega a_2\cos(\gamma_2-\gamma_1)+c_2a_2\sin(\gamma_2-\gamma_1)- \\ &\quad-H\sin\gamma_1=0; \\ &c_2(B-A)=0; \\ &-m_2\omega^2a_2+\alpha\omega a_1\sin(\gamma_2-\gamma_1)+c_2a_2- \\ &\quad-c_2a_1\cos(\gamma_2-\gamma_1)=0; \\ &\alpha\omega a_2-\alpha\omega a_1\cos(\gamma_2-\gamma_1)-c_2a_1\sin(\gamma_2-\gamma_1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из первого и четвертого уравнений данной системы и условия (5) имеем соотношение

$$c_1 a_0 = c_1 (a_1 - a_0). \tag{9}$$

Подставим выражение (9) во второе уравнение системы (8) и запишем данные уравнения в безразмерных величинах, что, очевидно, уменьшит число параметров механической системы и даст возможность представить систему уравнений в виде, более удобном для решения

$$\left.\begin{aligned}
&\left(3 - p_1^2 + \frac{c_2}{c_1}\right)\frac{a_1}{h} - [2\beta p_2 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) + \cos(\gamma_2 - \gamma_1)]\frac{c_2}{c_1}\times\\
&\qquad \times\frac{a_2}{h} - \cos\gamma_1 = 2\frac{a_0}{h};\\
&2\beta p_2 \frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{a_1}{h} - [2\beta p_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_1) - \sin(\gamma_2 - \gamma_1)]\frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{a_2}{h} -\\
&\qquad - \sin\gamma_1 = 0;\\
&2\beta p_2 \frac{a_1}{h}\sin(\gamma_2 - \gamma_1) - \frac{a_1}{h}\cos(\gamma_2 - \gamma_1) = (p_2^2 - 1)\frac{a_2}{h};\\
&\frac{a_1}{h}\sin(\gamma_2 - \gamma_1) + 2\beta p_2 \frac{a_1}{h}\cos(\gamma_2 - \gamma_1) = 2\beta p_2 \frac{a_2}{h}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где введены следующие обозначения:

$$p_1 = \frac{\omega}{\omega_{01}};\ p_2 = \frac{\omega}{\omega_{02}};\ \omega_{01} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}};\ \omega_{02} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}};$$
$$2\beta = \frac{\varkappa}{m_2\,\omega_{02}};\ h = \frac{H}{c_1}. \tag{11}$$

Из последних двух уравнений системы 10 получаем соотношение

$$(1 + 4\beta^2 p_2^2)\frac{a_1}{h} = \sqrt{4\beta^2 p_2^6 + [1 - 4\beta^2)\,p_2^2]^2}\left(\frac{a_2}{h}\right). \tag{12}$$

Первые два уравнения системы (10) после некоторых преобразований приводятся к квадратному уравнению относительно величины $\frac{a_1}{h}$ из которого находим.

$$\frac{a_1}{h} = \frac{2\chi\frac{a_0}{h} \pm \sqrt{\chi^2 + \left[1 - 4\left(\frac{a_0}{h}\right)^2\right]\varepsilon^2}}{\chi^2 + \varepsilon^2}, \tag{13}$$

где величины $\varkappa$ и ε имеют выражения

$$\chi = \left(3 - p_1^2 + \frac{c_2}{c_1}\right) - \frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{(1 + 4\beta^2 p_2^2)\left[2\beta^2(2 + p_2^2)p_2^2 + (1 - p_2^2)\right]}{4\beta^2 p_2^6 + \left[1 - (1 - 4\beta^2)p_2^2\right]^2}; \tag{14}$$

$$\varepsilon = 2\beta p_1^2 \frac{c_2}{c_1}\left\{1 - \frac{(1 + 4\beta^2 p_2^2)\left[1 - 2(1 - 2\beta^2)p_2^2\right]}{4\beta^2 p_2^6 + \left[1 - (1 - 4\beta^2)p_2^2\right]^2}\right\}.$$

Из выражения (12) имеем

$$\frac{a_2}{h}=\frac{1+4\beta^2p_2^2}{\sqrt{4\beta^2p_2^6+\left[1-\left(1-4\beta^2\right)p_2^2\right]^2}}\cdot\frac{a_1}{h}\,, \tag{12a}$$

где $\frac{a_1}{h}$ определяется соотношением (13). Знак минус перед радикалом следует отбросить как не удовлетворяющий рассматриваемой задаче.

Таким образом, величины амплитуд $\frac{a_1}{h}$ и $\frac{a_2}{h}$ вынужденных колебаний масс m_1 и m_2 в зависимости от частоты вынуждающей силы и параметров системы $\left(\frac{a_0}{h};\ \frac{c_2}{c_1};\ \beta\right)$ выражаются уравнениями (13) и (12, a).

Резонансные кривые для масс m_1 и m_2 получаются из системы уравнений (10), в которой необходимо положить равным нулю член, характеризующий действие внешней силы. Обозначая амплитуды колебаний масс m_1 и m_2 теми же буквами, но заключенным в круглые скобки, получим

$$\left(\frac{a_1}{h}\right)=\frac{2\,\frac{a_0}{h}}{\chi}\,; \tag{15}$$

$$\left(\frac{a_2}{h}\right)=\frac{1+4\beta^2p_2^2}{\sqrt{4\beta^2p_2^6+\left[1-\left(1-4\beta^2\right)p_2^2\right]^2}}\left(\frac{a_1}{h}\right). \tag{16}$$

Если в процессе колебаний масса m_1 не достигает ограничителя, то имеем обычную линейную механическую систему с двумя степенями свободы с учетом сил сопротивления движению массы m_2. В этом случае сила упругости

$$F(x)=c_1x_1.$$

Поэтому система уравнений (3) в безразмерных величинах запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1-p_1^2+\frac{c_2}{c_1}\right)\frac{a_1}{h}-\left[2\beta p_2\sin(\gamma_2-\gamma_1)+\cos(\gamma_2-\gamma_1)\right]\frac{c_2}{c_1}\times\\
&\qquad\times\frac{a_2}{h}=\cos\gamma_1;\\
&2\beta p_2\frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{a_1}{h}-\left[2\beta p_2\cos(\gamma_2-\gamma_1)-\sin(\gamma_2-\gamma_1)\right]\frac{c_2}{c_1}\times\\
&\qquad\times\frac{a_2}{h}=\sin\gamma_1;\\
&2\beta p_2\frac{a_1}{h}\sin(\gamma_2-\gamma_1)-\frac{a_1}{h}\cos(\gamma_2-\gamma_1)=(p_2^2-1)\frac{a_2}{h}\,;\\
&\frac{a_1}{h}\sin(\gamma_2-\gamma_1)+2\beta p_2\frac{a_1}{h}\cos(\gamma_2-\gamma_1)=2\beta p_2\frac{a_2}{h}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Произведя вычисления, аналогичные вышеизложенным, получим выражения $\frac{a_1}{h}$ и $\frac{a_2}{h}$ в виде:

$$\frac{a_1}{h}=\frac{1}{\sqrt{\chi^2+\varepsilon^2}}; \tag{18}$$

$$\frac{a_2}{h}=\frac{1+4\beta^2p_2^2}{\sqrt{4\beta^2p_2^6+\left[1-\left(1-4\beta^2\right)p_2^2\right]^2}}\cdot\frac{a_1}{h}, \tag{19}$$

где

$$\chi=\left(1-p_1^2+\frac{c_2}{c_1}\right)-\frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{\left(1+4\beta^2p_2^2\right)\left[2\beta^2\left(2+p_2^2\right)p_2^2+\left(1-p_2^2\right)\right]}{4\beta^2p_2^6+\left[1-\left(1-4\beta^2\right)p_2^2\right]^2};$$

$$\varepsilon=2\beta p_2\frac{c_2}{c_1}\left\{1-\frac{\left(1+4\beta^2p_2^2\right)\left[1-2\left(1-2\beta^2\right)p_2^2\right]}{4\beta^2p_2^6+\left[1-\left(1-4\beta^2\right)p_2^2\right]^2}\right\}. \tag{20}$$

Таким образом, величины амплитуд $\frac{a_1}{h}$ и $\frac{a_2}{h}$ вынужденных колебаний масс m_1 и m_2 в зависимости от частоты возмущающей силы и параметров $\left(\frac{c_2}{c_1};\ \beta\right)$ для линейной системы определяются уравнениями (18) и (19).

Определение областей частот, при которых происходят устойчивые колебания массы m_1 с ударом об ограничитель, в общем виде весьма громоздко, ввиду чего этот вопрос в работе не рассматривается. Однако для оценки границ области устойчивости колебаний с ударом об ограничитель массы m_1 можно в первом приближении пользоваться результатами, полученными при исследовании системы с двумя степенями свободы без учета сил сопротивления [4].

Задаваясь конкретными значениями параметров системы $\left(\frac{a_0}{h};\ \frac{c_2}{c_1};\ \frac{m_2}{m_1};\ \beta\right)$, можем построить графики, наглядно иллюстрирующие процесс развития колебаний системы при изменении частоты возмущающей силы.

Пусть $p_1=p_2=p$, тогда $\frac{c_2}{c_1}=\frac{m_2}{m_1}=\mu$. Кроме того, зададим численные значения параметров системы:

$$\frac{a_0}{h}=2;\quad \mu=0{,}2;\quad \beta=0{,}1. \tag{21}$$

На рис. 2 представлены графически зависимости амплитуд колебаний масс m_1 и m_2 при изменении частоты p для выбранных значений параметров системы (21). Проследим, как происходит развитие колебаний системы. При увеличении частоты p от нуля система начинает колебаться. Если при этом масса m_1 не достигает ограничителя, то имеем линейный случай. Амплитудные кривые строим по формулам (18). Когда масса m_1 ударяется об ограничитель, то кривые строим по формулам (13). Жирными линиями выделены резонансные кривые (15), которые берут на-

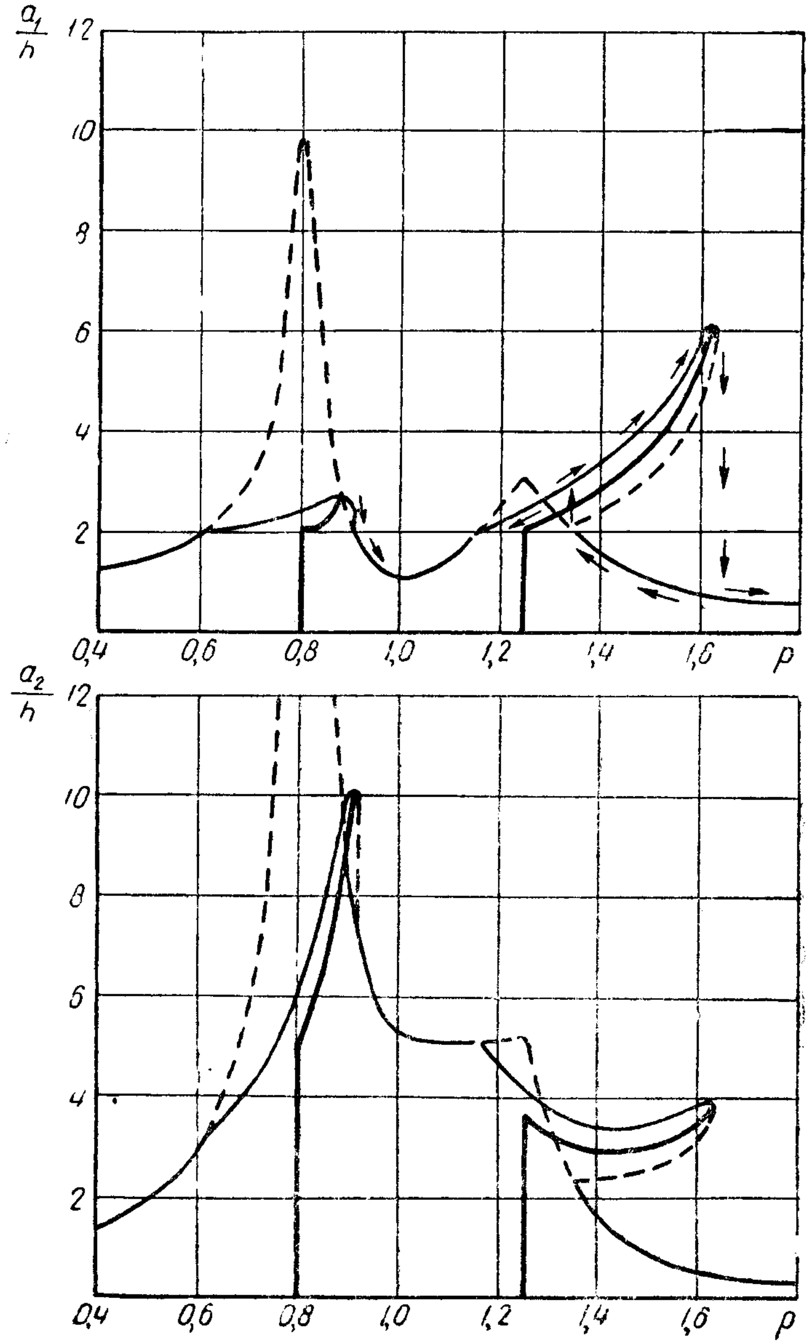

Рис. 2. Амплитудные кривые колебаний массы m_1 и массы m_2 динамического поглотителя.

чало с прямых линий, соответствующих резонансным прямым линиям линейной системы с учетом сил сопротивления. При дальнейшем увеличении частоты p система приходит в состояние резонанса (первый резонанс) и при некотором значении p происходит «срыв» колебаний массы m_1 с ударом об ограничитель, т. е. масса m_1 колеблется, не достигая ограничителя. Имеем обычный линейный случай. Амплитудные кривые строим по формулам (18). Увеличивая дальше частоту p, получим, что масса m_1 снова начнет ударяться об ограничитель. Дальнейшее построение кривых ведем по формулам (13). При достижении второго резонанса при некотором значении p происходит второй раз «срыв» колебаний массы m_1 с ударом об ограничитель. В результате имеем опять линейный случай. Построение амплитудных кривых ведем по формулам (18). При дальнейшем увеличении частоты p амплитуды колебаний масс m_1 и m_2 стремятся к нулю.

Наоборот, уменьшая частоту p, при некотором ее значении, когда $\frac{a_1}{h} = \frac{a_0}{h}$ произойдет резкий скачок амплитуд колебаний масс m_1 и m_2. Причем частота p, соответствующая скачку амплитуды колебаний масс m_1 и m_2, будет меньше частоты, при которой произошел «срыв» колебаний, т. е. имеем характерное для нелинейной системы явление «затягивания» амплитуды колебаний. Уменьшая дальше величину p, получим, что масса m_1 опять попадает в такое состояние, при котором не будет касаться ограничителя. При некотором значении частоты p масса m_1, снова начнет ударяться об ограничитель и произойдет скачок величины амплитуд колебаний масс m_1 и m_2.

Из графиков видно, что амплитудные кривые не уходят в бесконечность, а имеют определенный максимум.

ВЫВОДЫ

Из приведенных расчетов и графиков видно, что введение в систему «упругая связь — масса — ограничитель» динамического поглотителя колебаний с учетом сил сопротивления вполне возможно. Присоединением такого динамического поглотителя можно снизить амплитуду колебаний массы m_1 системы с ограничителем, когда последняя находится в состоянии резонанса. При этом частота внешней силы может изменяться в некоторых пределах, чего не наблюдается в динамическом поглотителе без сил сопротивления [4].

Наличие сил сопротивления приводит к рассеиванию энергии колеблющихся масс системы, вследствие чего амплитуды колебаний последних в состоянии резонанса имеют конечные значения. При этом работа (энергия рассеивания), совершаемая силой сопротивления, равна этой силе, умноженной на перемещение, на котором она действует [2].

Вопрос о выборе «наилучшего коэффициента затухания» β [2] в зависимости от параметров системы $\left(\frac{c_2}{c_1}; \frac{m_2}{m_1}; \frac{a_0}{h}\right)$, при котором амплитуды колебаний массы m_1 будут иметь минимальные значения, в данной работе не рассматривается. Указанная задача является предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. М. Алабужев, В. И. Копытов. Исследование колебаний груза, ударяющегося об ограничитель. Известия ТПИ, том 106, Металлургиздат, 1958.
2. Ден Гартог. Теория колебаний. ОГИЗ, 1942.
3. Т. Карман, М. Био. Математические методы в инженерном деле. Гостехиздат, 1948.
4. В. И. Копытов. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы при ударе об ограничитель одной из масс. Известия вузов, Горный журнал, № 8, 1958.
5. С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле. ГНТИ, 1934.