

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ПРОГРЕВЕ ТЕЛ ЛУЧИСТЫМ ТЕПЛОМ

Г. П. БОЙКОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Известно, что решения дифференциального уравнения теплопроводности при граничных условиях типа второго рода содержат бесконечный, быстро сходящийся ряд, который в математической форме отражает влияние начальных условий на процесс распространения тепла [1], [2].

Существует много практических задач, где процесс развивается таким образом, что начальные условия очень быстро перестают сказываться. В этих случаях при расчетах температурного поля бесконечным рядом обычно пренебрегают, благодаря чему имеющиеся решения для тел классической формы [1], [2] сильно упрощаются. Последнее создает возможность для нахождения в некотором приближении температурного поля в телах, когда тепло распространяется более чем в одном измерении.

Сущность предлагаемой методики заключается в том, что температуру любой точки пространства рекомендуется находить через посредство соответствующего дополнения к температуре центра тела, т. е. решение задачи представляется в форме

$$T(x, y, z, \tau) = T(0, 0, 0, \tau) + \Phi. \quad (1)$$

Наиболее просто (и математически точно) к форме (1) приводятся существующие в литературе решения для тел классической формы, в которых температурное поле характеризуется одной координатой пространства. Так, выражения для неограниченной пластины, бесконечного цилиндра и шара [1]

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{q_c R}{\lambda} \left[ \frac{a \tau}{R^2} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R^2} \right];$$

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{q_c R}{\lambda} \left[ 2 \frac{a \tau}{R^2} - \frac{R^2 - 2x^2}{4R^2} \right];$$

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{q_c R}{\lambda} \left[ 3 \frac{a \tau}{R^2} - \frac{3R^2 - 5x^2}{10R^2} \right],$$

имеющие температуры центра соответственно

$$T(o, \tau) = T_0 + \frac{q_c R}{\lambda} \left[ \frac{a \tau}{R^2} - \frac{1}{6} \right];$$

$$T(o, \tau) = T_0 + \frac{q_c R}{\lambda} \left[ 2 \frac{a \tau}{R^2} - \frac{1}{4} \right];$$

$$T(o, \tau) = T_0 + \frac{q_c R}{\lambda} \left[ 3 \frac{a \tau}{R^2} - \frac{3}{10} \right],$$

представляются следующим обобщенным выражением:

$$T(x, \tau) = T(o, \tau) + \frac{q_c x^2}{2 \lambda R}. \quad (2)$$

Как видно, это выражение, одинаковое для неограниченной пластины, бесконечного цилиндра и шара, вполне соответствует форме (1).

Ранее [3] было показано, что температурное поле в любых телах (при распространении тепла более чем в одном измерении) вдоль линии стока тепла рассчитывается по формуле

$$T(x, o, \tau) = T_0 + \frac{q_c R_1}{\lambda} \left\{ \xi \frac{a \tau}{R_1^2} - \left[ \frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R_1^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

откуда температура центра

$$T(o, o, \tau) = T_0 + \frac{q_c R_1}{\lambda} \left\{ \xi \frac{a \tau}{R_1^2} - \frac{\xi}{2(\xi+2)} \right\}. \quad (3')$$

Сравнивая (3) и (3'), получаем

$$T(x, o, \tau) = T(o, o, \tau) + \frac{q_c x^2}{2 \lambda R_1},$$

что соответствует форме (1).

Как уже отмечалось [4], отношение составляющих расхождения градиента температуры  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \beta$  может рассматриваться как независимая от  $y$  величина. Поэтому, используя (3) и производя двукратное интегрирование по переменной  $y$ , получим

$$T(x, y, \tau) = \beta \frac{q_c y^2}{2 \lambda R_1} + \left[ F_1(x, \tau) + C_1 \right] y + \left[ F_2(x, \tau) + C_2 \right].$$

По условию симметрии

$$[F_1(x, \tau) + C_1] = 0.$$

Согласно центральным условиям (при  $y = 0$ )

$$[F_2(x, \tau) + C_2] = T(x, 0, \tau).$$

Тогда

$$T(x, y, \tau) = T(x, 0, \tau) + \beta \frac{q_c y^2}{2\lambda R_1} = T(0, 0, \tau) + \frac{q_c x^2}{2\lambda R_1} + \beta \frac{q_c y^2}{2\lambda R_1},$$

или что то же

$$T(x, y, \tau) = T_0 + \frac{q_c R_1}{\lambda} \left\{ \xi \frac{a \tau}{R_1^2} - \left[ \frac{\xi}{2(\xi + 2)} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R_1^2} \right] \right\} + \beta \frac{q_c y^2}{2\lambda R_1}. \quad (4)$$

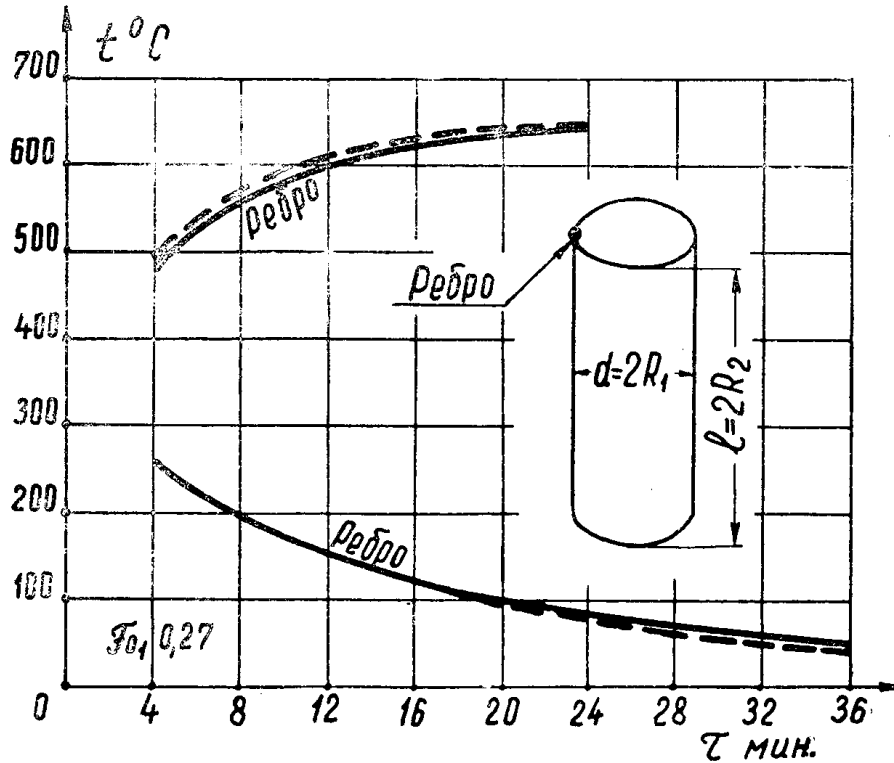


Рис. 1. График нагрева и охлаждения керамического цилиндра  $d = 40$  мм.  
 — изменение температуры ребра согласно формуле (6)  
 (центральные условия взяты по экспериментальным данным);  
 — то же по данным опыта [6].

Если принять  $\beta = \xi - 1$ , то (4) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности двумерного поля и может служить основой для расчета температуры в бесконечно длинном брусе квадратного и прямоугольного сечений, для которых значения коэффициента  $\xi$  определяются по формуле

$$\xi = 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5R_1^2} [3].$$

Выражение, аналогичное (4) для переменного теплового потока (там же), имеет вид

$$T_m(x, y) = T_0 + \frac{R_1}{\lambda} \left\{ \xi \frac{a \tau_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{i=m} q_{ci} \frac{c_1}{c_i} - q_{cm} \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \left[ \frac{\xi}{2(\xi + 2)} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R_1^2} \right] \right\} + \beta \frac{q_{cm} y^2}{2\lambda_m R_1}. \quad (4')$$

Ссылаясь на определенную приближенность, (4') уже в таком виде можно было бы рекомендовать для расчетов бесконечного бруса. Однако при таком выборе  $\beta$  и  $y \neq 0$  удовлетворительные результаты получаются для случаев, когда  $R_1$  и  $R_2$  близки друг к другу

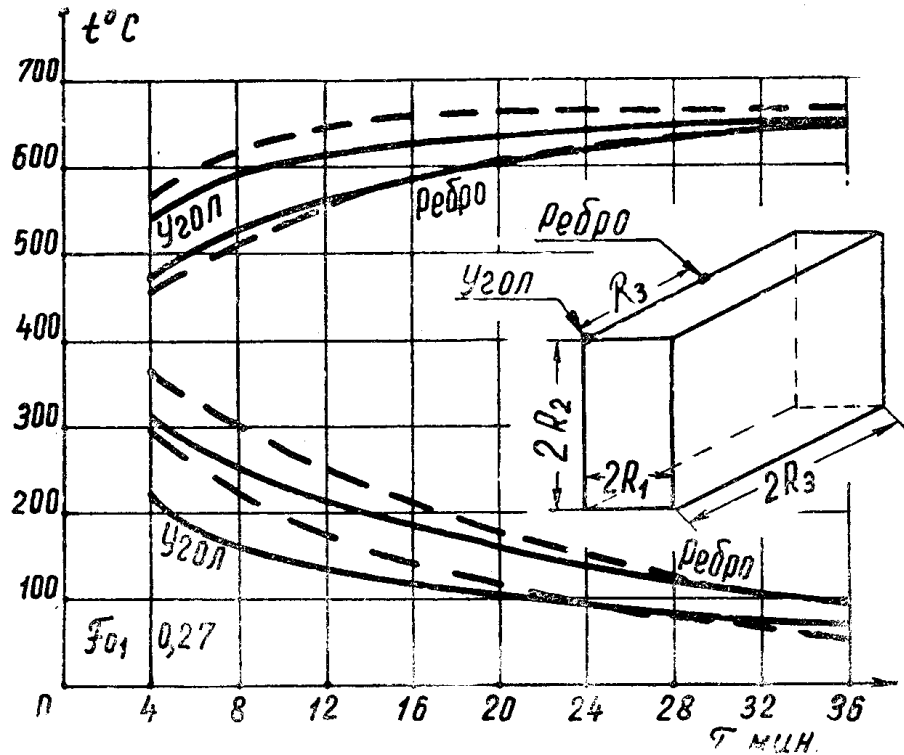


Рис. 2. График нагрева и охлаждения керамического параллелепипеда  $40 \times 80 \times 160$  мм.  
 - - - - изменение температуры ребра и угла согласно формуле (7) (центральные условия взяты по экспериментальным данным);  
 ————— то же по данным опыта [6].

и  $x = 0,5 R_1$ . В связи с этим далее предлагается отойти от аналитического способа исследования и вести расчет по формуле

$$T(x, y, \tau) = T(x, 0, \tau) + \beta^* \frac{q_{cm} y^2}{2\lambda_m R_1}, \quad (5)$$

а множитель  $\beta^*$  рассматривать как эмпирический. Для бесконечно длинного бруса квадратного сечения значения этого множителя рекомендуется выбирать на основе имеющегося соотношения

$$\beta = \xi - 1 = \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2} = \frac{1}{1 + 0,5},$$

где вместо коэффициента 0,5 (в знаменателе) производится подстановка отношения  $\frac{x}{R_1}$

$$\beta_{кв}^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{R_1}\right)}. \quad (5')$$

В случае бесконечно длинного бруса прямоугольного сечения (при постоянной температуре источника тепла) удовлетворительные

результаты получаются, когда коэффициент  $\beta^*$  подобран в виде функции

$$\beta_{np}^* = \left[ \left( 0,5 - \frac{R_1^2}{R_2^2 + R_1^2} \right) \frac{a\tau}{R_1^2} + \frac{1}{2 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} + 0,666 \left( 1 - \frac{x^2}{R_1^2} \right) \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \right] \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 + \left( \frac{x}{R_1} \right) R_1^2}, \quad (5'')$$

которая при  $R_1 = R_2$  переходит в выражение (5').

Для цилиндра расчетные зависимости устанавливаются точно так же, как и для бесконечного бруса. Выражения, аналогичные (5) и (5''), здесь запишутся как

$$T(r, z, \tau) = T(r, 0, \tau) + \beta^* \cdot \frac{q_{cm} z^2}{2\lambda_m R_1} \quad (6)$$

и

$$\beta^* = \left[ \left( 0,5 - \frac{R_1^2}{R_2^2 + R_1^2} \right) \frac{a\tau}{R_1^2} + \frac{1}{2 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} + 0,666 \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \right] \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 + \left( \frac{r}{R_1} \right) R_1^2}. \quad (6'')$$

При  $R_1 = R_2$

$$\beta^* = \frac{1}{1 + \frac{r}{R_1}}. \quad (6')$$

Чтобы получить соотношения для расчета температурного поля в кубе и параллелепипеде, можно исходить из следующего решения

$$T(x, y, z, \tau) = T(x, y, 0, \tau) + \gamma^* \frac{q_{cm} z^2}{2\lambda_m \cdot R_1},$$

где  $T(x, y, 0, \tau)$  — суть центральные условия (при  $z = 0$ ), а  $\gamma^*$  — аналог  $\beta^*$ . Раскрывая  $T(x, y, 0, \tau)$ , получим

$$T(x, y, z, \tau) = T(x, 0, \tau) + \beta^* \cdot \frac{q_{cm} y^2}{2\lambda_m R_1} + \gamma^* \cdot \frac{q_{cm} z^2}{2\lambda_m R_1}. \quad (7)$$

Для куба ( $R_3 = R_2 = R_1$ );

$$\gamma^* = \beta^* = \beta_{кс}^* = \frac{1}{1 + \frac{x}{R_1}}. \quad (7')$$

Для параллелепипеда  $\beta^* = \beta_{np}^*$  (см. формулу 5'')

$$\gamma^* = \left[ \left( 0,5 - \frac{R_1^2}{R_3^2 + R_1^2} \right) \frac{a\tau}{k_1^2} + \frac{1}{2 - \frac{R_1^2}{R_3^2}} + 0,666 \left( 1 - \frac{x^2}{R_1^2} \right) \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_3^2} \right) \right] \frac{R_1}{R_3^2 - \left( \frac{x}{R_1} \right) R_1^2} \quad (7'')$$

Здесь, как и в предыдущих формулах,

$T(x, o, \tau)$  — температурное поле вдоль линии стока тепла в теле [4] (от центра тела вдоль наименьшего измерения);

$\lambda_m$  — средний коэффициент теплопроводности тела в данный момент времени;

$q_{cm}$  — удельный тепловой поток на поверхности в данный момент времени, направленный по оси  $x$ ;

$2R_1 \leq 2R_2 \leq 2R_3$  — измерения тела.

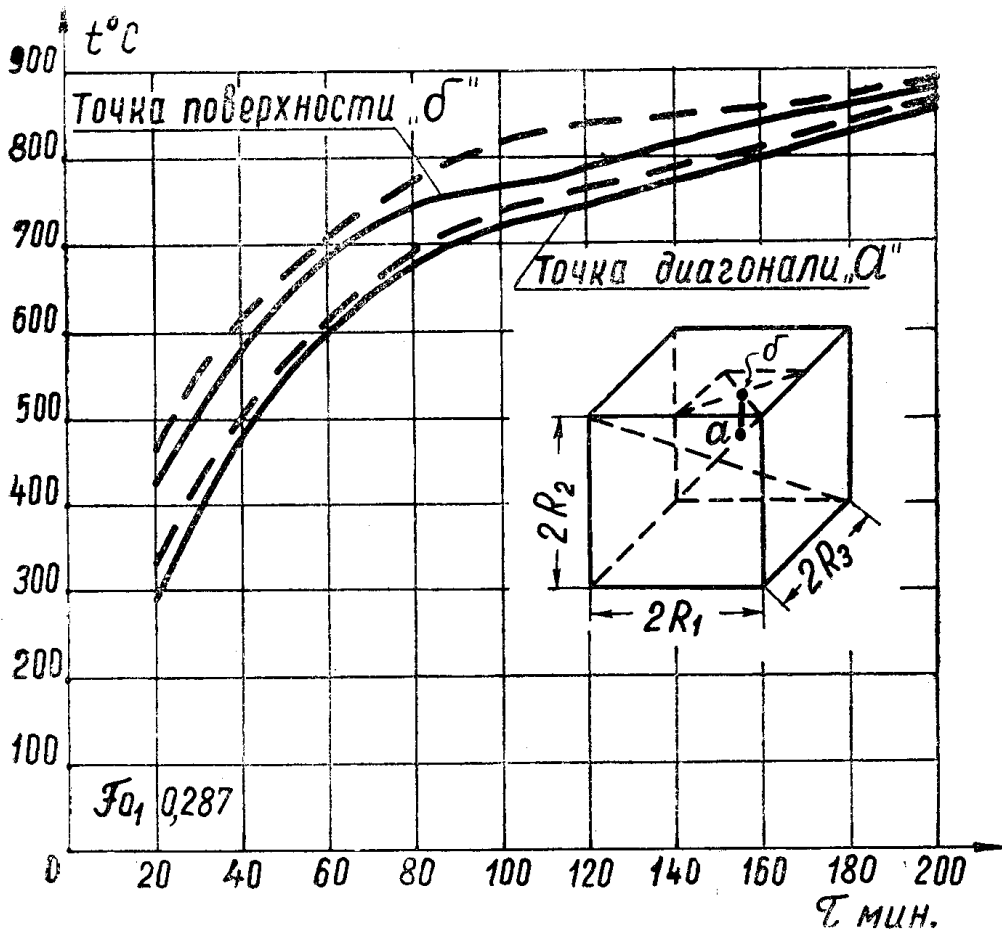


Рис. 3. График нагрева стального куба со стороной 457 мм.  
 — — — изменение температуры точек согласно формуле (7)  
 (центральные условия найдены методом сеток);  
 ————— то же по методу сеток [5].

Выражения (5), (6), (7) могут быть использованы как расчетные в целом ряде задач при известных центральных условиях. Последние могут быть найдены по формуле (4'), методом сеток, методом перемножения температурных критериев или на основе эксперимента.

Удельный поток тепла в каждый момент времени должен определяться по закону конвекции или же по закону лучеиспускания.

Для апробирования изложенной методики расчета были использованы метод сеток (данные В. Н. Соколова [5]), метод перемножения температурных критериев и некоторые опытные данные Будрина и Красовского [6]. Всего было произведено около пятидесяти сравнений. Часть из них представлена на рисунках 1—4.

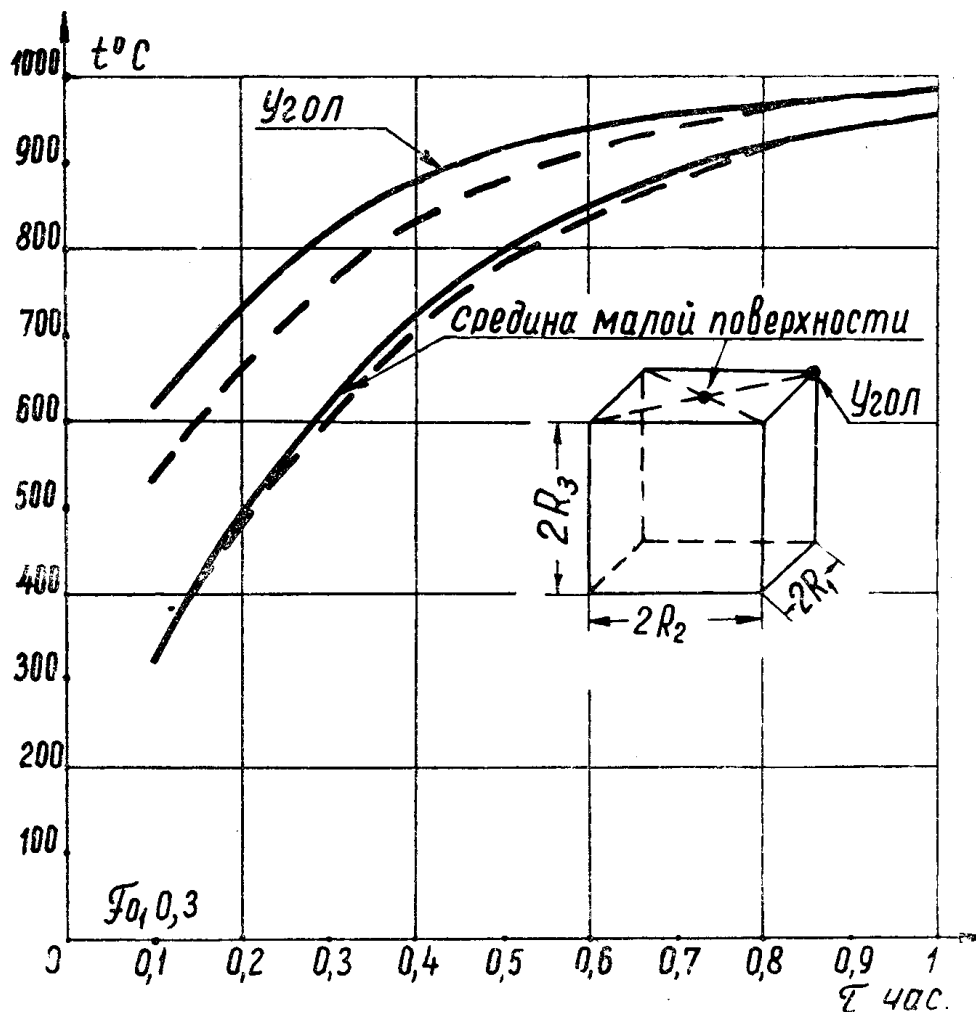


Рис. 4. График нагрева стального параллелепипеда  $200 \times 400 \times 400$  мм.  
 — — — изменение температуры угла и середины малой поверхности согласно формуле (7) (центральные условия найдены методом перемножения температурных критериев);  
 ————— то же по методу перемножения температурных критериев.

Формулы (5), (6) и (7) рекомендуются для практических расчетов как приближенные при значениях критерия Фурье

$$\frac{a\tau}{R_1^2} > 0,25.$$

Расход тепла при этом подсчитывается согласно положений теории теплопроводности [1]

$$Q = c\gamma \left[ \frac{1}{v} \int_v T dv - T_0 \right], \frac{\text{ккал}}{\text{м}^3}.$$

## Заключение

Распределение температуры в бесконечном брусе квадратного и прямоугольного сечения, цилиндре конечных размеров, кубе и параллелепипеде при условиях стабилизации процесса может быть приближенно получено путем соответствующего дополнения к температуре центра тела.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М., 1952.
2. Г. П. Бойков. Прогрев тел под действием лучистого тепла, Известия ТПИ, том 89, Томск, 1957.
3. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла (сообщение второе), Известия ТПИ, том 101, Томск, 1958.
4. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла (сообщение первое), Известия ТПИ, том 101, Томск, 1958.
5. В. Н. Соколов. Расчет нагрева тел методом сеток, ЦНИИМАШ. (Нагрев крупных слитков), ГИТИМЛ, М., 1954.
6. Д. В. Будрин, Б. Л. Красовский. Нагрев и охлаждение тел различной формы, Труды Уральского индустриального института им. С. М. Кирова, выпуск XVII, ГИТИЛ, С.-М., 1941.