ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 110 1962

К ВОПРОСУ О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ТЕЛ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Г. П. БОЙКОВ, Ю. А. КОРОЛЕНКО

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

В электротехнике очень часто возникает вопрос о температурном поле тела с внутренним тепловыделением. Нередко эти тела имеют неодинаковые значения коэффициентов теплопроводности λ по осям координат. В ряде случаев (некоторые типы магнитопроводов, конденсаторы и др). такие анизотропные тела имеют различные коэффициенты теплоотдачи α на различных участках поверхности тел.

Распределение температур в таком брусе при начале координат в центре симметрии тела описывается уравнениями:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2} + w = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial t(0;\ y)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial t(x;\ 0)}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t(R_1;y)}{\partial x} = \alpha_1 [t(R_1;\ y) - t_{f_1}];$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t(x;\ R_2)}{\partial y} = \alpha_2 [t(R_2;\ x) - t_{f_2}]. \tag{3}$$

Здесь $2R_1 \leqslant 2R_2$ — измерения тела, x и y текущие координаты точек сечения тела, t_{f_1} и t_{f_2} — температуры окружающей среды, w — внутреннее тепловыделение, одинаковое по всему объему тела.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial x^2} \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda^1} \frac{\dfrac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial x^2}} \right] = -\frac{w}{\lambda_1},$$

$$\frac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial y^2}\left[1+\frac{1}{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\dfrac{\dfrac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial x^2}}}\right]=-\frac{w}{\lambda_2}.$$

Считая, согласно [1], отношение составляющих расхождения градиента температуры постоянной величиной, последние соотношения запишутся так:

$$\frac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial x^2}\,\xi'=-\frac{w}{\lambda_1};\qquad \frac{\partial^2 t(x;\ y)}{\partial y^2}\,\frac{\xi'}{\xi'-1}=-\frac{w}{\lambda_2}. \tag{4}$$

Решение уравнений (4):

$$t(x;\ y)=-\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1}+f(y)x+\varphi(y),$$

$$t(x;\ y)=-\frac{\xi'-1}{\xi'}\,\frac{wy^2}{2\lambda_2}+f(x)y+\varphi(x).$$

Из условий симметрии (2) вытекает, что

$$f(x)=f(y)=0.$$

Учитывая это, получим при $x=0$ или $y=0$

$$t(0;\ y)=\varphi(y);\qquad t(x;\ 0)=\varphi(x).$$

Теперь

$$t(x;\ y)=-\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1}+t(0;\ y), \tag{5}$$

$$t(x;\ y)=-\frac{\xi'-1}{\xi'}\,\frac{wy^2}{2\lambda_2}+t(x;\ 0). \tag{6}$$

Полагая в уравнениях (4) соответственно $x=0$ и $y=0$, получим систему обычных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 t(x;\ 0)}{dx^2}\,\xi'=-\frac{w}{\lambda_1};\qquad \frac{d^2 t(0;\ y)}{dy^2}\,\frac{\xi'}{\xi'-1}=-\frac{w}{\lambda_2}.$$

Их решение

$$t(x;\ 0)=-\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1}+D_1;\qquad t(0;\ y)=-\frac{\xi'-1}{\xi'}\,\frac{wy^2}{2\lambda_2}+D_2.$$

Так как при $x=y=0$, $t(0;\ 0)=D$, то $D_1=D_2=D$ — температура центра тела, и выражения (5) и (6) становятся одинаковыми:

$$t(x;\ y)=D-\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1}-\frac{wy^2}{2\lambda_2}\,\frac{\xi'-1}{\xi'}. \tag{7}$$

Решение (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности (1) и условию симметрии (2).

Для удовлетворения граничных условий (3) необходимо соответствующим образом определить ξ' и D.

Принимаем

$$-\lambda_1 \frac{\partial t(R_1;y)}{\partial x} = \alpha_1 [t(R_1;\,y)_{cp} - t_{f_1}],$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial t(x;R_2)}{\partial x} = \alpha_2 [t(x;\,R_2)_{cp} - t_{f_2}], \tag{8}$$

где

$$t(R_1;\,y)_{cp} = \frac{1}{R_2}\int_0^{R_2} t(R_1;\,y)dy = D - \frac{wR_1^2}{2\xi'\lambda_1} - \frac{\xi'-1}{\xi'}\,\frac{wR_2^2}{6\lambda_2},$$

$$t(x;\,R_2)_{cp} = \frac{1}{R_1}\int_0^{R_1} t(x;\,R_2)dx = D - \frac{wR_1^2}{6\xi'\lambda_1} - \frac{\xi'-1}{\xi'}\,\frac{wR_2^2}{2\lambda_2}.$$

Подставив значения $t(R_1;\,y)_{cp}$ и $t(x;\,R_2)_{cp}$ в (8), после преобразований получим

$$\xi' = \frac{\dfrac{R_1}{4\alpha_1} + \dfrac{R_2}{4\alpha_2} + \dfrac{R_1^2}{3\lambda_1} + \dfrac{R_2^2}{3\lambda_2}}{\dfrac{R_2}{4\alpha_2} + \dfrac{R_2^2}{3\lambda_2} - \dfrac{t_{f_1}-t_{f_2}}{W}} \tag{9}$$

и температура центра тела будет

$$D = \frac{wR_1}{4\xi'\alpha_1} + \frac{wR_1^2}{2\xi'\lambda_1} + \frac{\xi'-1}{\xi'}\,\frac{wR_2^2}{6\lambda_2} + t_{f_1}. \tag{10}$$

Значения температур, найденных в различных точках поперечного сечения бруса по формулам (7), (9) и (10), хорошо совпадают с данными, полученными методом элементарных балансов.

Результаты сравнения приведены в таблице 1.

При расчетах было принято:

$$2R_1 = 0{,}5\ м,\quad 2R_2 = 1{,}0\ м,\qquad \lambda_1 = 1\,\frac{ккал}{м\,час\,^\circ C},$$

$$\lambda_2 = 50\,\frac{ккал}{м\,час\,^\circ C},\qquad \alpha_1 = 1000\,\frac{ккал}{м^2час\,^\circ C},$$

$$\alpha_2 = 10\,\frac{ккал}{м^2час\,^\circ C},\qquad t_{f_1} = 20^\circ C,\qquad t_{f_2} = 40^\circ C,$$

$$w = 500\,\frac{ккал}{м^3час}.$$

Таблица 1

№	Координаты точек (м)		Температуры точек °С		Расхождение %
	x	y	по ф-лам (7)(9) и (10)	методом элементарных балансов	
1	0	0	101,3	101,3	0
2	0,1	0	88,34	88,34	0
3	0,2	0	49,46	49,65	0,38
4	0	0,2	100,34	100,34	0
5	0,1	0,2	87,38	87,38	0
6	0,2	0,2	48,50	48,79	0,6
7	0	0,4	97,44	99,70	2,2
8	0,1	0,4	84,48	86,89	2,8
9	0,2	0,4	45,60	47,40	3,8

Заключение

Изложенный приближенный метод расчета температурного поля анизотропного бруса, находящегося в сложных условиях охлаждения, отличается простотой и достаточной точностью, кроме точек, лежащих на поверхности бруса, т. е. при $x=R_1$ и $y=R_2$ и близких к ним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков Г. П. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. „Известия ТПИ", том 101, Томск, 1958.