ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 110 1962

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СЕГМЕНТЕ

В. В. ИВАНОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

В некоторых приложениях необходимо знать стационарное распределение температуры в бесконечном брусе, сечение которого представляет собой сегмент с центральным углом 2β и длиной хорды $2R_0$. Поверхности, соответствующие дуге и хорде сегмента, поддерживаются соответственно при температурах T и нуль. Между поверхностями имеется теплоизоляция: точки iR_0, $-iR_0$ (рис. 1*а*).

Для решения этой задачи воспользуемся конформными отображениями.

Дробно-линейное отображение

$$z_1 = R_0 \frac{iR_0 - Z}{iR_0 + Z} \tag{1}$$

переводит область, ограниченную сегментом, на внутренность угла β (рис. 1б). При этом линии изотерм нуля и T плоскости Z переходят на плоскость z_1 соответственно в действительную положительную полуось и луч $\varphi_1 = \beta$.

С помощью функции

$$z_2 = z_1^{\pi/2\beta} \tag{2}$$

преобразуем угол β в прямой (рис. 1*в*) и используем отображение

$$z = iR_0^{\pi/2\beta} \frac{z_2 + R_0^{\pi/2\beta}}{z_2 - R_0^{\pi/2\beta}}, \tag{3}$$

переводящее прямой угол в полукруг радиуса $R_0^{\pi/2\beta}$ (рис. 1*г*). Заменив для удобства письма $R_0^{\pi/2\beta}$ через R, найдем, что функция

$$W = \frac{1}{i} \ln \frac{z}{R}, \text{ где } W = u + iv,$$

отображает полукруг на полуполосу (рис. 1*д*). Изолирующие точки iR и $-iR$, изотермы T и нуля плоскости z отображаются на плоскость W соответственно в точки $\pi/2$, $-\pi/2$, в отрезок $(-\pi/2, \pi/2)$ и прямые $u = -\pi/2$ и $u = \pi/2$ $(Im\,W > 0)$.

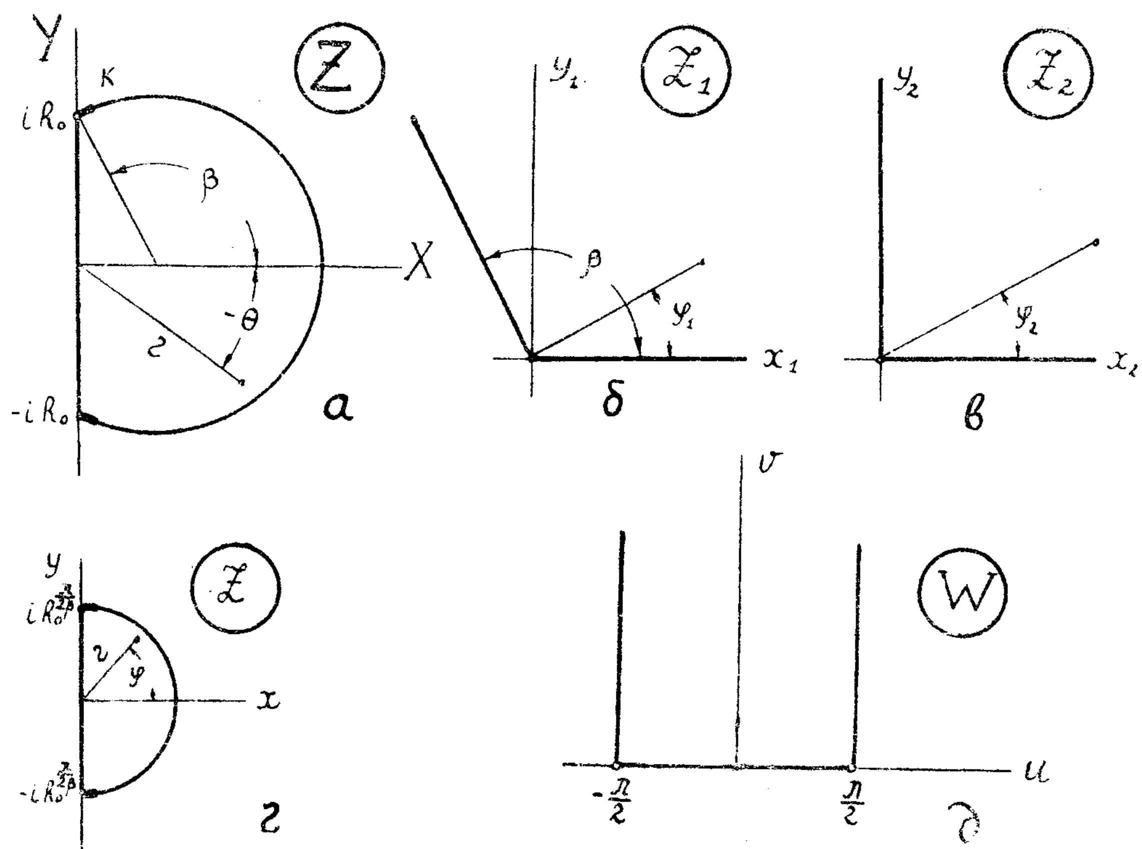
Z
Y
X
K
iR_0
$-iR_0$
β
−θ
r
а
Z_1
y_1
x_1
β
φ_1
б
Z_2
y_2
x_2
φ_2
в
Z
y
x
$iR_0^{\frac{\pi}{2\beta}}$
$-iR_0^{\frac{\pi}{2\beta}}$
r
φ
г
W
v
u
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
д

Рис. 1.

Температурное поле в этой полуполосе дается уравнением [1]

$$t(W)=\frac{2T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\cos u}{\operatorname{sh} v}. \qquad (4)$$

Так как $z=Re^{iw}$, то, заменяя $z=re^{i\varphi}$, получим $u=\varphi$, а $v=-\ln r/R$. Подставляя значения u и v в (4), найдем распределение температуры в полукруге радиуса R:

$$t(z)=t(r,\ \varphi)=\frac{2T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2Rr\cos\varphi}{R^2-r^2}. \qquad (5)$$

Решая (3) относительно z_2 при $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, получим, что

$$\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{y_2}{x_2}=\operatorname{arctg}\frac{2Rr\cos\varphi}{R^2-r^2},$$

$$\text{а } t(z_2)=\frac{2T}{\pi}\varphi_2. \qquad (6)$$

Объединяя (2) и (6), определим температурное поле внутри угла β

$$t(z_1)=\frac{T}{\beta}\varphi_1.$$

Подставляя $Z=r(\cos\Theta+i\sin\Theta)$ в (1), имеем, что

$$\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}=\operatorname{arctg}\frac{2R_0r\cos\Theta}{R_0^2-r^2}.$$

Отсюда искомое распределение температуры в сегменте имеет вид

$$t(Z)=t(r,\ \Theta)=\frac{T}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{2R_0r\cos\Theta}{R_0^2-r^2}.$$

Тепло через сегмент $Q_\beta=-\lambda\int_S gradtds\ \left[\frac{ккал}{м.\ час}\right]$ можно определить на основе эквивалентности по тепловому потоку заданного сегмента и полукруга $R=R_0^{\pi/2\beta}$, температурное поле в котором дается уравнением (5),

$$gradt=\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=R}=\frac{2T}{\pi R\cos\varphi},\ \text{а } ds=Rd\varphi.$$

Угол φ должен меняться от нуля до $\pi/2-\left(\frac{\Delta\delta}{R_0}\right)^{\pi/2\beta}$, где $\Delta\delta$ — изолирующий отрезок $(iR_0,\ K)$, переходящий на плоскость z в отрезок $(\Delta\delta)^{\pi/2\beta}$. Следовательно,

$$Q_\beta=2\lambda\int^{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\Delta\delta}{R_0}\right)^{\pi/2\beta}}\frac{2TRd\Theta}{\pi R\cos\Theta}=\frac{4\lambda T}{\pi}\ln\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\delta}{R_0}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}}\right]. \qquad (7)$$

Нами проводилась проверка формулы (7) методом электротепловых аналогий на плоской электрической модели сегмента, изготовленной из электропроводной бумаги. По контурам модели укреплялись 2 медные шины, имитирующие изотермические поверхности T и нуля [2].

По закону Ома сила тока, протекающего в модели,

$$I = \frac{h}{\rho} \Delta V \cdot \Phi. \tag{8}$$

Здесь ΔV—напряжение на шинах, ρ—удельное электрическое сопротивление бумаги толщиной h, Φ — безразмерный коэффициент формы, с другой стороны,

$$Q_\beta = \lambda T \Phi.$$

Поэтому

$$\Phi = \frac{4}{\pi} \ln \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\delta}{R_0} \right)^{\pi/2\beta} \right]. \tag{9}$$

Проверка производилась путем сравнения значений Φ, полученных расчетом (9) и из опыта (8). Опыты производились для сегментов с углами β в 68° и 110°. Результаты сведены в таблицу

$\beta°$	R_0 *мм*	Δh *мм*	ρ/h *ом*	$\Phi_{расчет}$	$\Phi_{опыт}$	Погрешность, %
68	121,8	1,400	330	8,60	8,75	1,875
110	125,7	1,065	295	5,90	5,96	1,015

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1958.
2. Петухов Б. С. Опытное изучение процессов теплопередачи. Госэнергоиздат, 1952.