

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КАК АРТИНОВЫ ИЛИ НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Ч. 1

П.А. Крылов*, Е.И. Подберезина

*Томский государственный университет
Томский политехнический университет
E-mail: hggh45de@mail2000.ru

Приведен обзор результатов исследования абелевых групп как артиновых или нетеровых модулей над кольцами эндоморфизмов. Описаны абелевы группы A и B такие, что группа гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы B . Описание групп A и B , для которых группа $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы A , сведена к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B – либо квазициклическая группа, либо делимая группа без кручения. Охарактеризованы абелевы группы A и B , для которых группа $\text{Hom}(A, B)$ есть нетеров модуль над кольцом $E(A)$ или $E(B)$. Исследование произвольной абелевой группы с нетеровым слева кольцом эндоморфизмов сведено к исследованию группы без кручения с нетеровым слева кольцом эндоморфизмов. Исследование группы с нетеровым справа кольцом эндоморфизмов осталось незавершённым. Описаны сепарабельные абелевы группы без кручения с нетеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов.

В настоящее время быстро развивается теория абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Возрастающий интерес к этому разделу алгебры понятен: теория абелевых групп тесно переплетается с теориями модулей, колец, множеств, категорий, чисел и во многом является источником идей для смежных областей алгебры.

Каждой абелевой группе можно сопоставить ассоциативное кольцо с единицей $E(A)$ всех её эндоморфизмов. Это кольцо несёт определённую информацию о самой группе A . Основную задачу, относящуюся к кольцам эндоморфизмов, можно сформулировать так: найти по возможности точные соотношения между свойствами группы A и свойствами её кольца эндоморфизмов.

Истоки теории колец эндоморфизмов лежат в теории линейных преобразований векторных пространств. Важную роль в становлении теории колец эндоморфизмов сыграла книга Бэра [1]. В монографии Фукса [2, 3] рассматриваются кольца эндоморфизмов. В работе [4] освещены результаты о кольцах эндоморфизмов абелевых групп. Основы теории колец эндоморфизмов абелевых групп заложены Бэром, Капланским, Селе, Фуксом, Пирсом, Корнером, Ричменом, Уокером. В книге [5] подробно представлены все основные разделы теории колец эндоморфизмов абелевых групп.

Кольца эндоморфизмов абелевых групп широко изучаются с различных точек зрения. Их теория

составляет самостоятельное направление, тесно связанное, конечно, с самой теорией абелевых групп. Этот раздел современной алгебры можно рассматривать с одной стороны, как часть теории абелевых групп, а с другой – как ветвь теории колец эндоморфизмов модулей. Он примыкает к общим теориям, но имеет значительную специфику.

Изучение колец эндоморфизмов абелевых групп приносит дополнительные сведения о самих группах, вводит в исследование новый круг понятий и методов, помогает выделить неизвестные ранее классы групп и отыскать различные соотношения между ними. Изучение колец эндоморфизмов стимулирует исследования по теории модулей и их колец эндоморфизмов. Применение колец эндоморфизмов полезно и в других областях алгебры: аддитивные группы колец, E -модули и E -кольца.

Двумя важнейшими направлениями в теории колец эндоморфизмов являются рассмотрение групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов и изучение групп с кольцами эндоморфизмов специального вида (последнее направление называется также «кольцевые свойства колец эндоморфизмов»). С достижениями по этому кругу задач можно познакомиться также по обзору [4].

На каждой абелевой группе A получается структура левого модуля над кольцом эндоморфизмов $E(A)$ группы A , если положить $\alpha a = \alpha(a)$ для всех $\alpha \in E(A)$ и для всех $a \in A$. Многие задачи приводят к

необходимости рассмотрения группы A как модуля над кольцом $E(A)$. Начало систематическому изучению групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов было положено работами Ричмена и Уокера [6], Дугласа и Фарахата [7]. Группы как модули над кольцами эндоморфизмов предлагается исследовать в книге [2, проблема 12]. Внимание многих специалистов привлекают абелевы группы как модули над их кольцами эндоморфизмов. Изучались группы, являющиеся конечно порождёнными [8], инъективными [9], проективными [10], плоскими [11] модулями над своими кольцами эндоморфизмов.

Программа исследования колец эндоморфизмов со специальными свойствами была предложена Селе. Она привлекает большое внимание специалистов. Актуальность этого направления подчёркивает постановка проблемы 84 в книге [3]. Имеется в виду следующее. Для некоторого кольцевого свойства описать абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых обладают этим свойством. Исследовались группы с коммутативными [12], локальными [13], регулярными [14], самоинъективными [15], наследственными [16] кольцами эндоморфизмов.

Артиновы и нётеровы кольца и модули играют исключительно важную роль в теории колец и модулей (см. Ламбек [17], Каш [18. Гл. 6]). Артиновость или нётеровость модуля представляют по существу некоторые условия конечности.

Интересна следующая история возникновения понятий нётерова (артинова) кольца и модуля. Исторически одним из исходных пунктов развития теории некоммутативных колец и модулей над такими кольцами была теория алгебр над полем K . Как сами такие алгебры, так и их идеалы и модули над ними являются одновременно векторными пространствами над K . Следовательно, можно привлечь теорию векторных пространств, что и было сделано на первом этапе развития теории. Если используются условия конечности, то ясно, что нужно требовать конечной размерности лежащих в основе векторных пространств над K .

Последующее развитие было направлено на максимально возможное освобождение от предположения, что мы имеем дело с алгеброй. При рассмотрении колец, не являющихся алгебрами, в нашем распоряжении уже нет теории линейных пространств и потому, в частности, возникает вопрос о подходящей замене условий конечности для алгебр, которые более не применимы. Соответствующие понятия и точки зрения здесь разработала в первую очередь Эмми Нётер, заложив тем самым основы для дальнейшего развития. В качестве условий конечности она ввела условия минимальности и максимальности, которые могут быть сформулированы эквивалентным образом как условия для цепей подмодулей. И в других разделах математики они оказались столь же важными и естественными. Сразу подчеркнём, что в дальнейшем речь идёт о конечных или счётных цепях (ря-

дах) подмодулей и в качестве отношения порядка рассматривается включение.

Абелевы группы как нётеровы модули над кольцами эндоморфизмов изучались Рейдом [8] и Парасом [19]. В § 111 книги [3] дано описание абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых являются телами, простыми или артиновыми кольцами. Там же характеризуются периодические группы с нётеровыми кольцами эндоморфизмов.

Группа гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ стандартным способом превращается в левый модуль над кольцом $E(B)$ и в правый модуль над кольцом $E(A)$. Хорошо известно, что существует естественный изоморфизм левых $E(B)$ -модулей $\text{Hom}(Z, B) \cong B$, где группа B также рассматривается как левый $E(B)$ -модуль. Поскольку $\text{Hom}(A, A) = E(A)$, то мы видим, что исследование группы $\text{Hom}(A, B)$ как левого $E(B)$ -модуля и правого $E(A)$ -модуля действительно включает изучение групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов и изучение групп с кольцами эндоморфизмов специального вида.

Группа гомоморфизмов является важной и полезной конструкцией не только в теории абелевых групп, колец и модулей, но и в других областях математики. В монографии Фукса [2] найдено алгебраическое строение группы гомоморфизмов, установлены её гомологические свойства. Тому обстоятельству, что группа $\text{Hom}(A, B)$ является $E(B)$ -модулем и $E(A)$ -модулем, в литературе уделялось мало внимания, хотя сам этот факт используется часто. Модульный подход к изучению группы гомоморфизмов с одной стороны, позволяет в качестве следствий единообразно выводить результаты о группах как модулях над кольцами эндоморфизмов и о кольцах эндоморфизмов со специальными свойствами. С другой стороны он даёт возможность получить дополнительную информацию об алгебраическом строении группы гомоморфизмов. Кроме того, введение новых классов групп расширяет знания об абелевых группах.

Все используемые далее обозначения стандартны. Буква p всегда обозначает простое число, N – множество всех натуральных чисел, Z – группа или кольцо целых чисел, Q – группа или поле рациональных чисел, $Z(p)$ – циклическая группа порядка p , $Z(p^r)$ – квазициклическая p -группа, J_p – группа целых p -адических чисел, F_p – аддитивная группа поля p -адических чисел. Для группы G обозначим через $E(G)$ её кольцо эндоморфизмов, $r(G)$ – ранг, а $r_p(G)$ – p -ранг группы G , то есть $r_p(G) = r(G/pG)$. Если A и B – группы, то группа $\text{Hom}(A, B)$ – группа гомоморфизмов из группы A в группу B . Для натурального числа n определим две вполне характеристические подгруппы группы G :

$$nG = \{ng \mid g \in G\} \text{ и } G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}.$$

Все группы, о которых идёт речь, абелевы.

Приведём некоторые хорошо известные факты и понятия общего характера, которые в дальнейшем будем применять без пояснений.

Структура левого $E(B)$ -модуля на группе $\text{Hom}(A, B)$ задаётся с помощью формулы $(\alpha\varphi)a = \alpha(\varphi a)$ для всех $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$, $\alpha \in E(B)$, $a \in A$. Структура правого $E(A)$ -модуля получается с помощью формулы $(\varphi\beta)a = \varphi(\beta a)$ для любого эндоморфизма $\beta \in E(A)$. В частности, всякую группу A можно естественным образом превратить в левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов $E(A)$, считая, что $\alpha a = \alpha(a)$ для любого $\alpha \in E(A)$ и $a \in A$.

Пусть A и B – группы. Положим

$$S_A(B) = \sum_{\alpha: A \rightarrow B} \alpha A, \quad K_B(A) = \bigcap_{\alpha: A \rightarrow B} \ker \alpha.$$

Используем краткие обозначения $S = S_A(B)$, $K = K_B(A)$, $\bar{A} = A/K$. Подгруппа S называется следом группы A в группе B (или A -цоколем). Она вполне характеристична в группе B . Подгруппа K называется B -радикалом группы A , она является вполне характеристической подгруппой группы A . Факторгруппу \bar{A} можно назвать коследом группы B в группе A . Имеют место очевидные равенства $S = S_A(S)$, а также $K_B(\bar{A}) = 0$. Ясно, что $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(A, S)$. Группу $\text{Hom}(A, B)$ можно также естественным образом отождествить с группой $\text{Hom}(\bar{A}, S)$. А именно, обозначив через i вложение $K \rightarrow A$, а через π канонический гомоморфизм $A \rightarrow A/K$, получим индуцированную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/K, B) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(K, B),$$

где i^* , π^* – индуцированные гомоморфизмы. По определению подгруппы K должно быть $i^* = 0$. Следовательно, отображение π^* является изоморфизмом. С помощью этого изоморфизма и получается отождествление. Отметим ещё, что в силу вполне характеристичности подгруппы K в группе A факторгруппа A/K есть левый $E(A)$ -модуль, а $\text{Hom}(A/K, B)$ – правый $E(A)$ -модуль. Изоморфизм π^* является изоморфизмом правых $E(A)$ -модулей.

Часто применяются известные утверждения об индуцированных последовательностях. Если последовательность групп $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ точна, а M – левый модуль над кольцом R , то имеем точную последовательность левых и правых R -модулей соответственно:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(H, M) \rightarrow \text{Hom}(G, M) \rightarrow \text{Hom}(F, M), \\ 0 \rightarrow \text{Hom}(M, F) \rightarrow \text{Hom}(M, G) \rightarrow \text{Hom}(M, H). \end{aligned}$$

Если же последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ является точной последовательностью левых R -модулей, G – некоторая группа, то получаем точную последовательность правых и левых R -модулей соответственно

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(L, G) \rightarrow \text{Hom}(M, G) \rightarrow \text{Hom}(K, G), \\ 0 \rightarrow \text{Hom}(G, K) \rightarrow \text{Hom}(G, M) \rightarrow \text{Hom}(G, L). \end{aligned}$$

Укажем важные подмодули модуля $\text{Hom}(A, B)$, которые можно получить, исходя из определённых подгрупп групп A и B . Приведём также некоторые канонические модульные разложения группы $\text{Hom}(A, B)$, индуцируемые разложениями группы A или B . Если W – некоторая подгруппа (вполне характеристическая подгруппа) группы B , то $\text{Hom}(A, W)$ – подмодуль $E(A)$ -модуля ($E(B)$ -модуля) $\text{Hom}(A, B)$. Отсюда если

$$B = \prod_{i \in I} W_i,$$

где W_i – некоторые подгруппы (вполне характеристические подгруппы и множество I конечно), то имеет место естественный изоморфизм $E(A)$ -модулей ($E(B)$ -модулей):

$$\text{Hom}(A, B) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, W_i).$$

Переходя к группе A , можно получить следующие подмодули и разложения. Если V – некоторая подгруппа (вполне характеристическая подгруппа) группы A , то множество $\{\varphi \in \text{Hom}(A, B) \mid \varphi V = 0\}$ будет подмодулем $E(B)$ -модуля (соответственно $E(A)$ -модуля) $\text{Hom}(A, B)$. Его можно отождествить с $\text{Hom}(A/V, B)$. В частности, в случае $A = V_1 \oplus V_2$ группу $\text{Hom}(V_1, B)$ считаем равной следующей подгруппе группы $\text{Hom}(A, B)$: $\{\varphi \in \text{Hom}(A, B) \mid \varphi V_2 = 0\}$. Разложение

$$A = \sum_{i \in I}^{\oplus} V_i,$$

где V_i – некоторые подгруппы (вполне характеристические подгруппы) группы A даёт естественный изоморфизм $E(B)$ -модулей ($E(A)$ -модулей):

$$\text{Hom}(A, B) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(V_i, B).$$

Доказательства многих результатов опираются также на следующее замечание о притягивающих модулях [20. С. 523]. Пусть $\rho: R \rightarrow S$ – гомоморфизм колец, M – правый (левый) S -модуль. Посредством формул $mr = m\rho(r)$ (соответственно $rm = \rho(r)m$), где $m \in M$, $r \in R$, на группе M вводится структура правого (левого) R -модуля. Модуль M_R (${}_R M$) называется притягивающим для модуля M_S (${}_S M$). Его R -подмодули совпадают с S -подмодулями, если ρ сюръективен [18. С. 56], [20. С. 523].

Это замечание играет важную роль в следующих часто возникающих ситуациях. Пусть M – левый модуль над некоторым кольцом R , A и B – группы. Тогда $\text{Hom}(A, M)$ ($\text{Hom}(M, B)$) – левый (правый) R -модуль. Обычно модуль M будет появляться в связи с вполне характеристическими подгруппами групп A и B . Пусть, например, V – вполне характеристическая подгруппа группы A . Тогда имеем $E(A)$ -модули V и A/V . Особенно важен случай, когда V – вполне характеристическое прямое слагаемое группы A . Для наших целей полезно то, что для такой подгруппы V подмодули $E(A)$ -модуля V и $E(V)$ -модуля V совпадают. Действительно, канонический гомоморфизм колец $E(A) \rightarrow E(V)$ является сюръективным и рассматриваемая ситуация укладывается в рамки понятия притягивающего модуля. Факторгруппа A/V также является $E(A)$ -модулем и $E(A/V)$ -модулем и подмодули этих модулей суть одно и то же. Опять канонический гомоморфизм колец $E(A) \rightarrow E(A/V)$ сюръективен. Можно далее заключить, что подмодули $E(A)$ -модуля и $E(V)$ -модуля $\text{Hom}(V, B)$ совпадают и то же справедливо для подмодулей $E(A)$ -модуля и $E(A/V)$ -модуля $\text{Hom}(A/V, B)$. Аналогичным образом, если W – вполне характеристическое прямое слагаемое

группы B , то совпадают подмодули $E(B)$ -модуля и $E(W)$ -модуля $\text{Hom}(A, W)$, а также подмодули $E(B)$ -модуля и $E(B/W)$ -модуля $\text{Hom}(A, B/W)$.

Будем говорить, что простое число p относится к какой-то группе, если она имеет p -компоненту, (то есть p -компонента этой группы отлична от нуля).

p -компонентой группы G называется наибольшая p -группа, содержащаяся в G . Понятно, что p -компонента группы G совпадает с p -компонентой её периодической части.

Делимой (редуцированной) p -компонентой некоторой группы G будем называть делимую (редуцированную) часть её p -компоненты.

Группа называется ограниченной, если порядки всех её элементов ограничены в совокупности. Ограниченная группа является прямой суммой циклических групп (теорема 17.2 из книги [2]).

Кольцо R называется нётеровым слева (артиновым слева), если модуль ${}_R R$ нётеров (артинов). Аналогично определяются нётеровы и артиновы справа кольца.

Модуль ${}_R M$ называется нётеровым (артиновым), если всякое непустое множество его подмодулей имеет максимальный (минимальный) по включению элемент.

Говорят, что возрастающая (убывающая) цепь подмодулей модуля M

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots (A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots)$$

стабилизируется (или обрывается), если она содержит лишь конечное число различных модулей A_n .

Теорема 1. [18. Теорема 6.1.2]. Пусть M – левый (правый) R -модуль, A – его подмодуль. Следующие условия эквивалентны:

- (1) M нётеров (артинов);
- (2) A и M/A нётеровы (артиновы);
- (3) каждая возрастающая (убывающая) цепь подмодулей модуля M стабилизируется.

Изложение полученных авторами результатов начнём с эндоартиновых и эндонётеровых групп.

Группа A , являющаяся нётеровым (артиновым) модулем над своим кольцом эндоморфизмов, называется эндоартиновой (эндонётеровой). Получено полное описание эндоартиновых групп, а изучение эндонётеровых групп сведено, что традиционно для теории абелевых групп, к изучению эндонётеровых групп без кручения [21. С. 172]:

Теорема 2. 1) Группа A эндоартинова тогда и только тогда, когда $A = B \oplus D$, где B – ограниченная группа, D – делимая группа с конечным числом ненулевых p -компонент.

2) Группа A эндонётерова тогда и только тогда, когда $A = B \oplus C$, где B – ограниченная группа, C – эндонётерова группа без кручения.

В доказательстве этой теоремы использована лемма 1.

Лемма 1. Пусть группа $A = \sum_{i \in I} A_i$ и H – вполне характеристическая подгруппа в A . Тогда

$$H = \sum_{i \in I} (H \cap A_i),$$

где каждая подгруппа $H \cap A_i$ вполне характеристична в A_i . Если некоторые слагаемые A_i и A_j изоморфны, то всякий изоморфизм между ними индуцирует изоморфизм между $H \cap A_i$ и $H \cap A_j$.

Теорема 2 играет важнейшую роль в доказательстве артиновости (нётеровости) многих подмодулей модуля $\text{Hom}(A, B)$ (теоремы 3, 5, предложения 5, 10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. – М.: Иностранная литература, 1955. – 400 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
4. Марков В.Т., Михалёв А.В., Скорняков Л.А., Туганбаев А.А. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. В кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1983. – Т. 21. – С. 183–254.
5. Крылов П.А., Михалёв А.В., Туганбаев А.А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – 451 с.
6. Richman F., Walker E. Primary abelian groups as modules over their endomorphism rings // Math. Z. – 1965. – V. 89. – № 3. – P. 77–81.
7. Douglas A.J., Farahat H.K. The homological dimension of an abelian group as a module over its ring of endomorphism // Monatsh. Math. – 1965. – V. 69. – № 2. – P. 294–305.
8. Reid J.D. Abelian groups finitely generated over their endomorphism rings // Lecture Notes Math. – 1981. – V. 874. – № 5. – P. 41–52.
9. Richman F., Walker E. Modules over PIDs that are injective over their endomorphism rings // Ring theory. – N.Y.: Academic Press, 1972. – P. 363–372.
10. Arnold D., Pierce R.S., Reid J.D., Vinsonhaler C., Wickless W. Torsion-free abelian groups of finite rank projective as modules over their endomorphism rings // J. Algebra. – 1981. – V. 71. – № 1. – P. 1–10.
11. Faticoni Th. G., Goeters P. Examples of torsion-free groups flat as modules over their endomorphism rings // Commun. Algebra. – 1991. – V. 19. – № 1. – P. 1–27.
12. Szele T., Szendrei J. On abelian groups with commutative endomorphism rings // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1951. – V. 2. – № 9. – P. 309–324.
13. Orsatti A. Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi e locale // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1965. – V. 35. – № 7. – P. 107–115.
14. Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Commun. Algebra. – 1994. – V. 22. – № 4. – P. 1161–1176.
15. Иванов А.В. Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием // Абелевы группы и модули / Под ред. Л.А. Скорнякова. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. – С. 93–109.
16. Albrecht U. Baer's lemma and Fuchs' problem 84 a // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 203. – № 2. – P. 565–582.
17. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
18. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

19. Paras A.T. Abelian groups as Noetherian modules over their endomorphism rings // Contem. Math. – 1994. – V. 171. – № 9. – P. 325–332.
20. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 688 с.
21. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа $\text{Hom}(A, B)$ как артинов $E(B)$ -модуль // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 170–184.

УДК 519.21

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ L_2 -УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.А. Банько

Ставропольский институт управления
E-mail: norra7@yandex.ru

Получены необходимые и достаточные условия L_2 -устойчивости решения линейного дифференциального уравнения с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса, принимающего два состояния с заданными интенсивностями перехода из состояния в состояние.

Одним из методов исследования устойчивости в среднем, среднеквадратичном, а также L_2 -устойчивости вероятностных моделей является метод моментных уравнений [1, 2]. При этом исследование устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы детерминированных уравнений для моментов первого и второго порядка.

В работе [1] введено понятие L_2 -устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами.

Нулевое решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))X(t), (t \geq 0), \quad (1)$$

называется L_2 -устойчивым, если для любого случайного решения $X(t)$ системы (1) с ограниченным начальным значением $\langle \|X(0)\|^2 \rangle$ сходится несобственный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \langle \|X(t)\|^2 \rangle dt.$$

Для дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами L_2 -устойчивость не равносильна устойчивости по Ляпунову.

В работе [2] получены уравнения для начальных моментов первого и второго порядка систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса. Также показано, что устойчивость решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений для начальных моментов первого порядка является необходимым и достаточным условием устойчивости в среднем системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами (1). Устойчивость системы уравнений для начальных моментов второго порядка являются необходимым и достаточным условием устойчи-

вости в среднеквадратичном данной системы со случайными коэффициентами (1).

В работе [3] с помощью уравнений для начальных моментов первого и второго порядка получены необходимые и достаточные условия L_2 -устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами, сформулированные в виде теоремы.

Теорема. Пусть для системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса, (1) со скачком решений выполнены условия [2, теорема 1].

Для того, чтобы нулевое решение системы было L_2 -устойчивым, необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

1. Система уравнений

$$B_k = D_k(0) + \sum_{s=1}^n \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* dt \quad (k=1, \dots, n). \quad (2)$$

при любых $D_k(0) > 0$ ($k=1, \dots, n$) имела положительное решение $B_k > 0$ ($k=1, \dots, n$).

2. Система уравнений (2) при $D_k(0) = E$ ($k=1, \dots, n$) имела положительное решение $B_k > 0$ ($k=1, \dots, n$).

3. Сходился метод последовательных приближений

$$B_k^{(j+1)} = D_k(0) + \sum_{s=1}^n \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s^{(j)} N_s^*(t) C_{ks}^* dt, \\ B_k^{(0)} \equiv 0 \quad (k=1, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots).$$

4. Оператор L имел спектральный радиус меньше единицы.

Кроме того, для L_2 -устойчивости решений системы достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$B_k - \sum_{s=1}^n \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* dt > 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

при некоторых матрицах $B_k > 0$ ($k=1, \dots, n$).