

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В НЕКОТОРЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

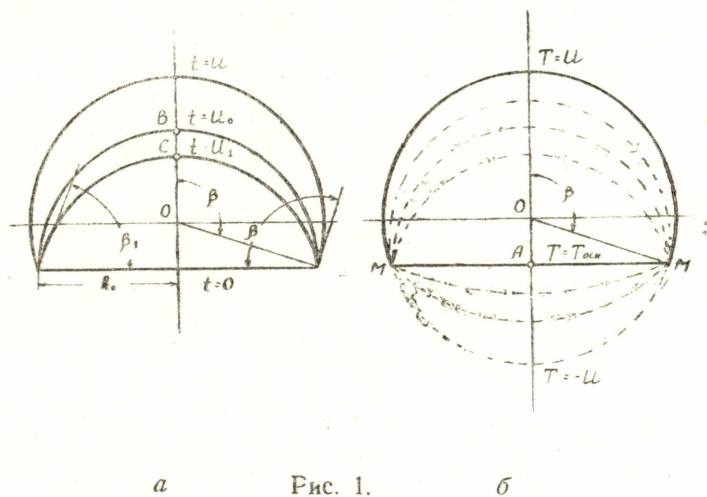
В. В. ИВАНОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Шаровой сегмент

Постановка задачи: найти стационарное распределение температуры в шаровом сегменте радиуса R , если поверхности сферы и основания поддерживаются соответственно при температурах U и нуль (рис. 1 а).

Определим сначала температурное поле в шаре радиуса R , когда часть его поверхности, соответствующая заданному шаровому сег-



а Рис. 1. б

менту, остается при температуре U , а другая часть имеет температуру $(-U)$ (рис. 1 б). Задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0$$

с граничными условиями

$$T(r, \theta)_{r=R} = \begin{cases} U & \text{при } 0 \leq \theta < \beta \\ -U & \text{при } \beta < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Решение строится в виде ряда

$$T(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \Theta),$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра n -го порядка. Постоянные a_n определяются из граничных условий

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\pi}^0 T(R, \Theta) P_n(\cos \Theta) d(\cos \Theta).$$

Или, заменив $\cos \Theta = x$,

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^{\cos \beta} (-U) P_n(x) dx + \int_{\cos \beta}^1 U P_n(x) dx \right].$$

Вычисляя интегралы с помощью рекуррентной формулы

$$(2n+1) P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x),$$

окончательно найдем

$$T(r, \Theta) = U \left\{ -\cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta) - P_{n+1}(\cos \beta)] \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \Theta) \right\}. \quad (1)$$

Изотермы внутри шара имеют вид сферических поверхностей, заканчивающихся на окружности MM , кроме одной изотермы — плоскости, проходящей через точку $A(R \cos \beta, \pi)$ и являющейся основанием заданного сегмента (рис. 1 б), для которой

$$T_{осн} = T(R \cos \beta, \pi) = U \left\{ -\cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta) - P_{n+1}(\cos \beta)] (\cos \beta)^n (-1)^n \right\}. \quad (2)$$

Вычитая (2) из (1), получим распределение температуры в шаровом сегменте, основание которого поддерживается при 0° , а сферическая поверхность — при температуре:

$$U - T_{осн} = U \left\{ 1 + \cos \beta - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta) - P_{n+1}(\cos \beta)] (\cos \beta)^n (-1)^n \right\} \quad (3)$$

Разделив теперь разность $T(r, \Theta) - T_{осн}$ на фигурную скобку формулы (3), найдем искомое температурное поле

$$t(r, \Theta) = U \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta) - P_{n+1}(\cos \beta)] \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \Theta) - (\cos \beta)^n (-1)^n \right]}{1 + \cos \beta - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta) - P_{n+1}(\cos \beta)] (\cos \beta)^n (-1)^n}. \quad (4)$$

Если угол β острый, то в уравнении (4) выпадает $(-1)^n$.
 Полагая $\cos \beta = 0$ и используя соотношения

$$P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) = P_{n-1}(0) \frac{2n+1}{n+1},$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 2^n} \text{ и } P_{2n+1}(0) = 0,$$

получим, как частный случай формулы (4), стационарное распределение температуры в полушаре:

$$t(r, \theta) = U \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta), \quad (5)$$

что соответствует решению, приведенному в [3].

Чтобы найти поток тепла через шаровой сегмент, температурное поле в котором дается уравнением (4), выделим в нем изотермическую поверхность — полусферу радиуса R_0 (рис. 1 а). В стационарном состоянии Q_β количество тепла, проходящее через поверхность шарового сегмента и через выделенную поверхность полусферы, одно и то же.

Если температура полусферы U_0 , то тепло через нее

$$Q_\beta = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=R_0} \cdot 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta \left[\frac{\text{ккал}}{\text{час}} \right].$$

Находя градиент по уравнению (5), получим

$$Q_\beta = 2\pi\lambda U_0 R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3) [(2n)!]^2 (2n+1)}{(2n+2)^2 \cdot 2^{4n} (n!)^4} \cong \pi\lambda U_0 R_0 \cdot 7,53.$$

Так как изотерма U_0 проходит через точку B (рис. 1 а), то, подставляя в (4) ее координаты $r=R|\sin \beta + \cos \beta|$, $\theta=0$ и задаваясь различными $\beta > \frac{\pi}{2}$, находим зависимость $U_0 = UF(\beta)$ для тупых углов β .

С другой стороны, изотерма U_1 , являющаяся поверхностью шарового сегмента с углом $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$, проходит через точку C (рис. 1 а). Подставляя координаты точки C

$$r = R \left(\sin \beta \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + \cos \beta \right), \quad \theta = 0,$$

при заданном постоянном $\beta > \frac{\pi}{2}$ в уравнение (4) и заменяя в нем $U = U_0/F(\beta)$, найдем $F(\beta_1)$ — связь между U_1 и U_0 для острых углов β . Окончательно:

$$Q = 7,53 \pi\lambda R_0 U F(\beta) \left[\frac{\text{ккал}}{\text{час}} \right],$$

где $R_0 = R \sin \beta$ — радиус основания шарового сегмента, а $F(\beta)$ находится по кривой (рис. 2).

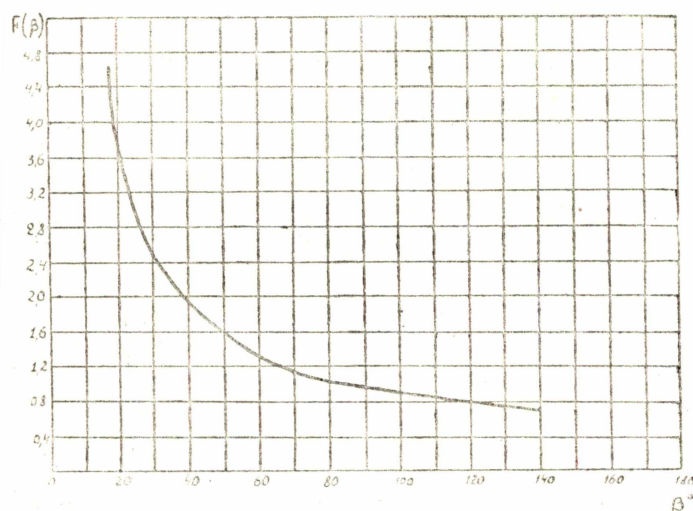


Рис. 2.

Срезанный вытянутый сфероид

Постановка задачи: найти стационарное распределение температуры внутри срезанного вытянутого сфероида (рис. 3а), если поверхность вращения поддерживается при температуре U , а плоскость среза имеет температуру, равную нулю.

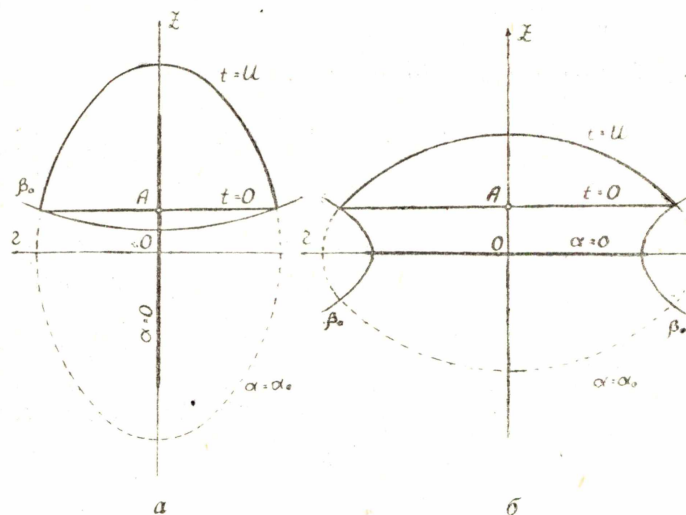


Рис. 3.

Задача решается аналогично предыдущей. Сначала определим температурное поле в вытянутом сфероиде, если часть его поверхности, соответствующая заданному срезанному вытянутому сфероиду, остается при температуре U , а другая часть имеет температуру $(-U)$. Вводим вырожденные эллипсоидальные координаты: α , β , φ [1, 2]. Тогда решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\operatorname{sh} \alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sin \beta \frac{\partial T}{\partial \beta} \right] = 0$$

имеет вид

$$T(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} P_n(\cos \beta). \quad (6)$$

Здесь $\alpha = \alpha_0$ — уравнение поверхности заданного вытянутого сфероида, а f_n — постоянные, определяемые из граничных условий

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\pi}^0 T(\alpha_0, \beta) P_n(\cos \beta) d(\cos \beta),$$

причем

$$T(\alpha, \beta)_{\alpha=\alpha_0} = \begin{cases} U & \text{при } 0 \leq \beta < \beta_0 \\ -U & \text{при } \beta_0 < \beta \leq \pi \end{cases}$$

После подстановки f_n в (6) получим

$$T(\alpha, \beta) = U \left\{ -\cos \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} P_n(\cos \beta) \right\}. \quad (7)$$

Одна из изотерм внутри вытянутого сфероида представляет собой плоскость, проходящую через точку A с координатами $\alpha = 0$, $\beta = \beta_A$ или $\alpha = \alpha_A$, $\beta = 0$, и является основанием для заданного срезанного вытянутого сфероида. Поэтому

$$T_{\text{осн}} = T(0, \beta_A) = U \left\{ -\cos \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(\cos \beta_A)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} \right\}. \quad (8)$$

Вычитая (8) из (7) и деля эту разность на фигурную скобку выражения

$$U - T_{\text{осн}} = U \left\{ 1 + \cos \beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(\cos \beta_A)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} \right\},$$

получим искомое температурное поле:

$$t(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \left[\frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta) - P_n(\cos \beta_A)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} \right]}{1 + \cos \beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(\cos \beta_A)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)}},$$

где $\cos \beta_A = \operatorname{ch} \alpha_0 \cos \beta_0$.

Когда плоскость среза проходит через точку $A(\alpha_A, 0)$, решение имеет вид

$$t(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \left[\frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha) \cdot P_n(\cos \beta) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_A)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} \right]}{1 + \cos \beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_A)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)}}$$

где $\operatorname{ch} \alpha_A = \operatorname{ch} \alpha_0 \cos \beta_0$.

Для случая половины вытянутого сфероида ($\alpha_A = 0$, $\beta_A = \pi/2$, $\beta_0 = \pi/2$)

$$t(\alpha, \beta) = U \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_0)} P_{2n+1}(\cos \beta),$$

что соответствует решению, приведенному в [4].

Срезанный сжатый сфероид

Определим температурное поле в срезанном сжатом сфероиде, если температуры плоскости среза и поверхности вращения равны соответственно нулю и U (рис. 3 б). Используя вырожденные эллипсоидальные координаты α, β, φ [1, 2] и не повторяя рассуждений предыдущих параграфов, найдем, что решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{ch} \alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) = 0$$

для сжатого сфероида, $\alpha = \alpha_0$, имеет вид

$$T(\alpha, \beta) = U \left\{ -\cos \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(i \operatorname{sh} \alpha)}{P_n(i \operatorname{sh} \alpha_0)} P_n(\cos \beta) \right\}.$$

Причем

$$T(\alpha, \beta)_{\alpha=\alpha_0} = \begin{cases} U & \text{при } 0 \leq \beta < \beta_0 \\ -U & \text{при } \beta_0 < \beta \leq \pi \end{cases}.$$

Если срез проходит через точку $A(\alpha_A, 0)$, то искомое температурное поле выражается уравнением:

$$t(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \left[\frac{P_n(i \operatorname{sh} \alpha) P_n(\cos \beta) - P_n(i \operatorname{sh} \alpha_A)}{P_n(i \operatorname{sh} \alpha_0)} \right]}{1 + \cos \beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_{n+1}(\cos \beta_0)] \frac{P_n(i \operatorname{sh} \alpha_A)}{P_n(i \operatorname{sh} \alpha_0)}},$$

причем $\operatorname{sh} \alpha_A = \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \beta_0$

Для случая $\alpha_A = 0$, $\beta_0 = \pi/2$

$$t(\alpha, \beta) = \\ = U \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \frac{P_{2n+1}(i \operatorname{sh} \alpha)}{P_{2n+1}(i \operatorname{sh} \alpha_0)} P_{2n+1}(\cos \beta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ГИИЛ, 1952
 2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, 1953
 3. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. Гостехиздат, 1957.
 4. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1955.
-