ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Том 180 1971

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ СИГНАЛОВ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научным семинаром кафедр автоматики и телемеханики и автоматических систем)

Как известно [3, 6, 8], собственные функции самосопряженного дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с самосопряженными краевыми условиями, образуют ортогональную относительно некоторого веса систему функций, полную в пространстве $L^2\rho(x)$, т. е.

$$\int_{\alpha}^{b} \rho(x)\, U_i(x)\, U_\kappa(x)\, dx \begin{array}{l} = 0 \;\; i \neq \kappa, \\ \neq 0 \;\; i = \kappa \end{array}$$

где $\rho(x)$ — весовая функция, $U_i(x)$ и $U_\kappa(x)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_i и λ_κ. В частности, гипергеометрическая функция

$$F(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa (\beta)_\kappa}{(\gamma)_\kappa\, \kappa!}\, x^\kappa \tag{1}$$

при определенном соотношении постоянных есть решение задачи Штурма-Лиувилля для дифферециального уравнения, самосопряженная форма которого имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} U'\right] - \alpha\beta x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}\, U = 0. \tag{2}$$

Это уравнение, называемое гипергеометрическим, представляет весьма значительный интерес для приложений.

Если параметр α или β есть целое отрицательное число (или нуль), то ряд (1) обрывается и становится полиномом соответствующей степени. Это обстоятельство, если рассматривать интервал (0,1), приводит к самосопряженным граничным условиям при

$$\gamma > 0;\ \alpha + \beta - 1 - \gamma > 0. \tag{3}$$

Если положить

$$\alpha = -n\ (n = 0,\ 1,\ 2\ldots);\ \beta = n + \gamma + \delta - 1,$$

то гипергеометрическая функция образует последовательность полиномов

$$P_n^{\gamma\delta}(x) = F(-n, n+\gamma+\delta-1;\ \gamma;\ x)\ \ (n = 0,\ 1, 2\ldots), \tag{4}$$

которые называются полиномами Якоби [4,6,8].

При любых γ и δ, удовлетворяющих условиям (3), полиномы Якоби ортогональны с весом

$$\rho(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Введем подстановку $x = e^{-at}$, которая преобразует интервал (0,1) в интервал $(0, \infty)$ для новой переменной t. В результате последовательность (4) преобразуется в новую последовательность полиномов, но уже относительно e^{-at}. Это экспоненциальные полиномы Якоби или сокращенно „e“ — полиномы. Обозначим их прежним символом, но вместо аргумента x будем ставить t.

$$P_n^{(\gamma,\delta)}(e^{-at}) = P_n^{(\gamma,\delta)}(t) = F(-n,\ n+\gamma+\delta-1;\ \gamma;\ e^{-at}). \tag{6}$$

Параметр «a» — вещественный и положительный. Легко проверить, что «e»-полиномы Якоби ортогональны на интервале $(0, \infty)$ относительно веса

$$W(t) = e^{-\gamma a t}(1-e^{-at})^{\delta-1}. \tag{7}$$

Наибольший интерес представляют следующие частные значения γ и δ

$$1.\ \gamma = \delta = \frac{1}{2};\ W(t) = e^{-\frac{at}{2}}(1-e^{-at})^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(t) = T_n^*(t) = F(-n,\ n;\ \frac{1}{2};\ e^{-at}). \tag{8}$$

Мы получаем „e“ — полиномы Чебышева I рода.

$$2.\ \gamma = \delta = 1;\ W(t) = e^{-at},$$

$$P_n^{(1,1)}(t) = P_n^*(t) = F(-n,\ n+1;\ 1;\ e^{-at}). \tag{9}$$

тот случай дает „e“-полиномы Лежандра.

$$3.\ \gamma = \delta = \frac{3}{2};\ W(t) = e^{-\frac{3}{2}at}(1-e^{-at})^{\frac{1}{2}},$$

$$P_n^{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}(t) = U_n^*(t) = F\left(-n,\ n+2;\ \frac{3}{2};\ e^{-at}\right), \tag{10}$$

В этом случае имеем «e»-полиномы Чебышева II рода

1. Разложение некоторых функций в ряды по «е»-полиномам Лежандра

Экспоненциальные полиномы Лежандра удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-e^{-at})\frac{dP_n^*(t)}{dt}\right] + n(n+1)a^2e^{-at}P_n^*(t) = 0. \tag{1 = 1}$$

Их явное выражение сразу получается путем развертывания гипергеометрического ряда [1, 7]:

$$P_n^*(t) = F(-n,\ n+1;\ 1;\ e^{-at}) = \sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^\kappa\frac{(n+\kappa)!}{(\kappa!)^2(n-\kappa)!}e^{-\kappa a t}, \tag{1-2}$$

$$P_0^*(t) = 1;\ P_1^*(t) = 1-2e^{-at};\ P_2^*(t) = 1-6e^{-at}+6e^{-2at};$$

$$P_3^*(t) = 1-12e^{-at}+30e^{-2at}-20e^{-3at} \text{ и т. д.}$$

Заметим, что значения коэффициентов ряда (1—2) совпадают с соответствующими значениями коэффициентов смещенных полиномов Лежандра, определенных на интервале (0,1).

В [6] приведены эти коэффициенты для $n=14$ включительно. Отметим также, что „e"-полиномы Лежандра можно получить из обычных полиномов, определенных на интервале $(-1, 1)$, если сделать замену $x \to 1-2e^{-at}$ и выполнить необходимые преобразования. Таким образом, все соотношения, выведенные для обычных полиномов, сохраняют силу и для „e"-полиномов, если сделать указанную подстановку. Следует, однако, иметь в виду, что

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_n^*(t)}{dt} \cdot \frac{e^{at}}{2a}.$$

Рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных „e"-полинома, имеет вид [7]

$$(n+1)P_{n+1}^*(t) - (2n+1)(1-2e^{-at})P_n^*(t) + nP_{n-1}^*(t) = 0. \qquad (1\text{-}3)$$

Далее можно получить

$$\frac{dP_{n+1}^*(t)}{dt} - \frac{dP_{n-1}^*(t)}{dt} = (2n+1)\,2ae^{-at}P_n^*(t). \qquad (1\text{-}4)$$

Справедливы также соотношения

$$P_n^*(0) = (-1)^n;\; P_n^*(\infty) = 1, \qquad (1\text{-}5$$

$$|P_n^*(t)| \leqslant 1 \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty. \qquad (1\text{-}6)$$

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции, заданной на интервале $(0, \infty)$, в ряд по „e"-полиномам Лежандра. Предположим, что имеет место разложение

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^*(t). \qquad (1\text{-}7)$$

Сходимость этого ряда устанавливается следующей теоремой:

„Если $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} e^{-at}[f(t)]^2\,dt < \infty, \qquad (1\text{-}8)$$

то разложение (1—7) с коэффициентами

$$c_n = a(2n+1)\int_0^{\infty} e^{-at} f(t)\,P_n^*(t)\,dt \qquad (1\text{-}9)$$

сходится к $f(t)$ во всякой внутренней точке интервала $(0, \infty)$, являющейся точкой непрерывности этой функции». Эта теорема является аналогом известной теоремы о разложении произвольной функции, заданной на интервале $(-1,1)$, в ряд по обыкновенным полиномам Лежандра [7]. Коэффициенты разложения (1—9) легко могут быть получены по заданному преобразованию Лапласа функции $f(t)$.

Пусть $F(p)$ есть преобразование Лапласа функции $f(t)$, т. е.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt,$$

тогда, учитывая (1—2), можем написать

$$c_n = a(2n+1)\sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^{\kappa}\frac{(n+\kappa)!}{(\kappa!)^2(n-\kappa)!}\int_0^{\infty} e^{-(\kappa+1)at}f(t)\,dt =$$

$$= a(2n+1)\sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^{\kappa}\frac{(n+\kappa)!}{(\kappa!)^2(n-\kappa)!}F[(\kappa+1)a], \qquad (1\text{-}10)$$

где $F[(\kappa+1)a]$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$, в котором p заменено на $(\kappa+1)a$. Это обстоятельство позволяет выполнить обращение преобразования Лапласа в виде ряда по „e“-полиномам Лежандра.

Отметим, что поскольку система „e“-полиномов Лежандра полна в пространстве $L^2_{w(t)}\,[W(t)=e^{-at}]$, то имеет место равенство Парсеваля [8]

$$\int_0^{\infty} e^{-at}[f(t)]^2\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^2}{(2n+1)a}, \qquad (1\text{-}11)$$

так как

$$\int_0^{\infty} e^{-at}[P_n^*(t)]^2\,dt = \frac{1}{(2n+1)a}. \qquad (1\text{-}12)$$

Найдем преобразование Лапласа „e“-полинома $P_n^*(t)$. Имеем

$$P_n(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}P_n^*(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-pt}F(-n,\ n+1;\ 1;\quad e^{-at})\,dt. \qquad (1\text{-}13)$$

Если сделать подстановку $x=e^{-at}$, то получим табличный интеграл [4]

$$P_n(P) = \frac{1}{a}\int_0^1 x^{\frac{p}{a}}-1\,F(-n,\ n+1;\ 1;x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)\cdot\Gamma\left(1+n-\frac{p}{a}\right)}{a\Gamma\left(1-\frac{p}{a}\right)\cdot\Gamma\left(1+n+\frac{p}{a}\right)}.$$

Поскольку

$$\frac{\Gamma\left(1+n-\frac{p}{a}\right)}{\Gamma\left(1+n+\frac{p}{a}\right)} = \frac{\left(n-\frac{p}{a}\right)\left(n-1-\frac{p}{a}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{p}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{a}\right)}{\left(n+\frac{p}{a}\right)\left(n-1+\frac{p}{a}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p}{a}\right)\frac{p}{a}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)},$$

окончательно будем иметь

$$P_n(p) = \frac{1}{p}\prod_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\kappa+1)a-p}{(\kappa+1)a+p} \risingdotseq P_n^*(t). \qquad (1\text{-}13)$$

Рассмотрим теперь разложение экспоненциальной функции

$$f(t) = e^{-pt}, \qquad (1\text{-}14)$$

(где p — комплексный параметр) в ряд по „e“-полиномам Лежандра, которсе порождает большое число других полезных разложений. Условие (1-8) будет выполнено, если $Re p > -\frac{a}{2}$. Найдем коэффициенты $D_n(p)$ ряда

$$e^{-pt} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(p) P_n(t). \qquad (1\text{-}15)$$

Согласно общей формуле (1-9) имеем

$$D_n(p) = a(2n+1)\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-pt}P_n^*(t)\,dt.$$

Сравнивая с (1-13), убеждаемся, что

$$D_n(p) = a(2n+1)P_n(p+a) = \frac{(2n+1)a}{p+a}\prod_{\kappa=0}^{n-1}\frac{\kappa a - p}{(2+\kappa)a+p}. \qquad (1\text{-}16)$$

Таким образом,

$$e^{-pt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)a}{p+a}\prod_{\kappa=0}^{1-n}\frac{\kappa a - p}{(2+\kappa)a+p}P_n^*(t). \qquad (1\text{-}17)$$

Заметим, что ряд сходится равномерно, если $Re p > -\frac{a}{2}$. Предположим, что p — вещественная величина и, в частности, кратная „a“, т. е. $p = ma$ $(m = 1, 2 \ldots.)$, тогда разложение (1-17) обрывается на $(m+1)$-члене и получает вид

$$e^{-mat} = \sum_{n=0}^{m}\frac{2n+1}{m+1}\prod_{\kappa=0}^{n-1}\frac{\kappa - m}{2+\kappa+m}P_n^*(t). \qquad (1\text{-}18)$$

Эта формула позволяет выразить степени e^{-at} в виде линейной комтинации конечного числа „e“-полиномов. Для нескольких первых значений „m“ будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
e^{-at} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P_1^*(t)\\
e^{-2at} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}P_1^*(t) + \frac{1}{6}P_2^*(t)\\
e^{-3at} &= \frac{1}{4} - \frac{9}{20}P_1^*(t) + \frac{1}{4}P_2^*(t) - \frac{1}{20}P_3^*(t).\\
&- - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}19)$$

Пусть теперь $p = a + jb$, тогда, учитывая, что

$$e^{-at}\cos bt = Re\, e^{-(a+jb)t},$$

$$e^{-at}\sin bt = -Im e^{-(a+jb)t},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
e^{-at}\cos bt &= Re\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)a}{2a+jb}\prod_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\kappa-1)a-jb}{(3+\kappa)a+jb}P_n^*(t)\\
e^{-at}\sin bt &= -Im\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)a}{2a+jb}\prod_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\kappa-1)a-jb}{(3+\kappa)a+jb}P_n^*(t)
\end{aligned}\right\}. \qquad (1\text{-}20)$$

Эти разложения сходятся тем быстрее, чем меньше $\frac{b}{a}$. Из разложени (1=5) можно получить разложение для функции $f(t)=at$, Очевидно,

$$t=-\frac{d}{dp}(e^{-pt})|_{p=0} \tag{1-21}$$

и следовательно, учитывая равномерную сходимость ряда (1-15)

$$t=-\sum_{n=0}^{\infty} D_n'(p)\,P_n^*(t)\,|_{p=0}. \tag{1-22}$$

Согласно (1-16) $D_n(p)$ можно представить в виде

$$D_0(p)=\frac{a}{p+a},$$

$$D_n(p)=-\frac{(2n+1)\,aP}{(p+a)(p+2a)}N_n(p)\; n=1,\ 2\ldots,$$

где

$$N_n(p)=\prod_{\kappa=1}^{n-1}\frac{\kappa a-p}{(2+\kappa)\,a+p}\;[N_1(p)=1].$$

Производные будут равны

$$D_0'(p)=-\frac{a}{(p+a)^2},$$

$$D_n'(p)=-(2n+1)\,a\frac{2a^2-p^2}{(p+a)^2(p+2a)^2}N_n(p)-\frac{(2n+1)\,ap}{(p+a)(p+2a)}N_n'(p).$$

Полагая $p=0$, будем иметь $[N_n'(0)\neq\infty]$;

$$D_0'(0)=-\frac{1}{a};\; D_n'(0)=-\frac{2n+1}{2a}N_n(0)$$

$$N_n(0)=\prod_{\kappa=\_}^{n-1}\frac{\kappa}{2+\kappa}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{3\cdot 4\ldots(n-1)\,n\,(n+1)}=\frac{2}{n\,(n+1)}.$$

Окончательно получаем

$$D_n'(p)\,|_{p=0}=D_n'(0)=-\frac{2n+1}{an\,(n+1)},$$

Искомое разложение имеет вид

$$at=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\,(n+1)}P_n^*(t);\; 0\leqslant t<\infty. \tag{1-23}$$

Аналогично можно получить разложение для te^{-at}, так как

$$te^{-at}=-\frac{d}{dP}(e^{-pt})\,|_{p=a}.$$

Проще, однако, воспользоваться правилом умножения ряда на экспоненциальный множитель. Пусть

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n^*(t).$$

Найдем разложение для функции $e^{-at}f(t)$. Имеем

$$e^{-at}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{-at}P_n^*(t).$$

Из основного рекуррентного соотношения (1-3) найдем

$$e^{-at}P_n^*(t) = \frac{1}{2}P_n^*(t) - \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}^*(t) - \frac{n+1}{2(2n+1)}P_{n+1}^*(t).$$

Подставляя это выражение в ряд и выполнив преобразование индексов, получим

$$e^{-at}f(t) = \frac{1}{2}\left(c_0 - \frac{1}{3}c_1\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n - \frac{n+1}{2n+3}c_{n+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{n}{2n-1}c_{n-1}\right]P_n^*(t). \tag{1-24}$$

Умножим (1-23) на e^{-at} и воспользуемся формулой (1-24). В результате будем иметь искомое разложение

$$ate^{-at} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P_1^*(t) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}P_n^*(t). \tag{1-25}$$

Ряд сходится довольно быстро.

Рассмотрим разложение некоторых разрывных функций, которые широко используются в технических приложениях в качестве типовых воздействий.

Вернемся к разложению (1-15). Зафиксируем величину t, положив $t = \tau$, тогда будем иметь

$$e^{-p\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}D_n(p)\,P_n^*(\tau). \tag{1-26}$$

Если рассматривать (1-26) как результат преобразования по Лапласу некоторого временного соотношения, то последнее может быть найдено обращением обеих частей (1-26). Слева обращение дает дельта-функцию Дирака, т. е.

$$e^{-p\tau} \doteqdot \delta(t-\tau).$$

Учитывая (1-13) и (1-16), приходим к соответствию

$$D_n(p) \doteqdot a(2n+1)e^{-at}P_n^*(t). \tag{1-27}$$

В силу единственности преобразования Лапласа получим

$$\delta(t-\tau) = ae^{-at}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n^*(\tau)P_n^*(t) \tag{1-28}$$

или, учитывая, что $\delta(t-\tau) = \delta(\tau - t)$, ряд можно записать в виде

$$\delta(t-\tau) = ae^{-a\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n^*(\tau)P_n^*(t). \tag{1-29}$$

Разложения (1-28) и (1-29) должны пониматься в смысле слабой сходимости [2]. При $\tau = 0$ получим, учитывая (1-5),

$$\delta(t) = ae^{-at}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^nP_n^*(t) = a\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^nP_n^*(t) \tag{1-30}$$

или более точно

$$\delta(t) = ae^{-a|t|}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^nP_n^*(|t|), \tag{1-31}$$

так как $\delta(t)$ — функция четная. Заметим, что тот же результат можно получить непосредственно, определив коэффициенты по общей формуле (1-9).

Найдем разложение единичной функции со смещенным аргументом, т. е. функции

$$f(t) = 1(t-\tau) = \begin{matrix} 0 & 0 \leqslant t < \tau \\ 1 & \tau \leqslant t \leqslant \infty. \end{matrix}$$

Для коэффициентов имеем

$$C_n = a(2n+1)\int_0^\infty 1(t-\tau)\, e^{-at}\, P_n^*(t)\,dt = a(2n+1)\int_\tau^\infty e^{-at} P_n^*(t)\,dt.$$

Учитывая (1-4), получим

$$c_0 = e^{-a\tau}; \quad c_n = -\frac{1}{2}\left[P_{n+1}^*(\tau) - P_{n-1}^*(\tau)\right] \ (n = 1, 2 \ldots).$$

Искомое разложение имеет вид

$$1(t-\tau) = e^{-a\tau} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_{n+1}^*(\tau) - P_{n-1}^*(\tau)\right] P_n^*(\tau). \tag{1-9}$$

Ряд сходится в среднем.

До сих пор мы совершенно не касались вопроса о величине параметра „a“. Можно утверждать, что разложение произвольной функции по „e“-полиномам Лежандра будет сходиться независимо от величины параметра „a“, если выполнено условие (1-8). Однако, если ограничиться конечным числом членов, то точность аппроксимации будет уже существенно зависеть от величины параметра „a“, причем тем сильнее, чем меньше взятый отрезок ряда. Параметр „a“ может быть выбран из условия минимума квадратичной ошибки приближения отрезком ряда. Практически, однако, такой путь приводит к весьма громоздким выражениям и оказывается непригодным. Весовой множитель e^{-at} обеспечивает максимальную точность приближения на начальном участке, поэтому, если параметр „a“ находить из условия точного равенства отрезка ряда значению $f(t)$ при $t = \infty$, то, как показывают расчеты, это значение параметра „a“ будет близко к оптимальному.

Таким образом, задача сведется к решению уравнения

$$\sum_{n=0}^{m} c_n P_n^*(\infty) = \sum_{n=0}^{m} c_n = f(\infty) \neq \infty$$

c_n — зависит от „a“). Это уравнение может быть решено хотя бы приближенно.

2. «е»- полиномы Чебышева I рода

Экспоненциальные полиномы Чебышева I рода являются частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{e^{at}(1-e^{-at})}\,\frac{dT_n^*(t)}{dt}\right] + \frac{e^{-\frac{at}{2}}\, n^2 a^2\, T_n^*(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} = 0. \tag{2-1}$$

Так же, как и в случае „e“-полиномов Лежандра, эти полиномы могут быть получены из обычных полиномов Чебышева I рода путем замены *) $x \to 2e^{-at} - 1$. Все формулы, выведенные для обычных полиномов, сохраняют силу. В частности,

*) Возможна замена $x \to 1 - 2e^{-at}$. В этом случае $T_n^*(t)$ нужно умножить на $(-1)^n$.

$$T_n^*(t) = \cos n \arccos(2e^{-at} - 1), \tag{2-2}$$

$$T_{n+1}^*(t) = 2(2e^{-at} - 1)\,T_n^*(t) - T_{n-1}^*(t). \tag{2-3}$$

Введем подстановку

$$\alpha = \arccos(2e^{-at} - 1), \tag{2-4}$$

т. е.

$$e^{-at} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{2-4}$$

Тогда, как это следует из (2-2), последовательность „e"-полиномов $T_n^*(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ преобразуется в последовательность косинусов $\cos n\alpha$. Из (2-2) следует также, что

$$T_n^*(0) = 1;\ T_n^*(\infty) = (-1)^n;\ |T_n^*(t)| \leqslant 1. \tag{2-5}$$

Явное выражение для полиномов $T_n^*(t)$ можно получить путем развертывания соответствующего гипергеометрического ряда

$$T_n^*(t) = (-1)^n F\left(-n,\ n;\ \frac{1}{2};\ e^{-at}\right) = (-1)^n n \times$$

$$\times \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{(-1)^\kappa 2^\kappa (n + \kappa - 1)!\, e^{-\kappa at}}{(n - \kappa)!\,(2\kappa - 1)!!\,\kappa!}. \tag{2-6}$$

Для нескольких первых значений n будем иметь $\left[T_0^*(t) = \frac{1}{2}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l}
T_1^*(t) = -1 + 2e^{-at} \\
T_2^*(t) = 1 - 8e^{-at} + 8e^{-2at} \\
T_3^*(t) = -1 + 18e^{-at} - 48e^{-2at} + 32e^{-3at} \\
T_4^*(t) = 1 - 32e^{-at} + 160e^{-2at} - 252e^{-3at} + 128e^{-4at} \\
T_5^*(t) = -1 + 50e^{-at} - 400e^{-2at} + 1120e^{-3at} - 1280e^{-4at} + \\
+ 512^{-5at} \\
- - - - - - - - - - - - - -
\end{array}\right\} \tag{2-7}$$

Заметим, что коэффициенты полиномов $T_n^*(t)$ совпадают с коэффициентами смещенных полиномов Чебышева 1 рода, определенных на интервале (0,1) [6,9].

Как уже отмечалось, система полиномов $T_n^*(t)$ полна в пространстве $L^2_{W(t)}$, где весовая функция $W(t)$ имеет вид

$$W(t) = e^{-\frac{at}{2}}(1 - e^{-at})^{-\frac{1}{2}}. \tag{2-8}$$

Из общей теории ортогональных разложений следует [8], что если $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty W(t)\,[f(t)]^2\,dt < \infty, \tag{2-9}$$

то ряд

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(t) \tag{2-10}$$

будет сходится к $f(t)$ во всякой внутренней точке, в которой $f(t)$ непрерывна, если коэффициенты A_n определить формулой

$$A_n = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} \mathrm{T}_n^*(t)\,\mathrm{dt}. \qquad (2\text{-}11)$$

Если учесть, что $\mathrm{T}_0^*(t) = \frac{1}{2}$, то ряд (2-10) можно записать в виде

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{T}_n^*(t). \qquad (2\text{-}12)$$

Если же выполнить замену (2-4), то получим

$$f(t) \to f^*\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\alpha, \qquad (2\text{-}13)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^*\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos n\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \qquad (2\text{-}14)$$

Таким образом, мы имеем разложение некоторой периодической функции $f^*\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$ в обычный ряд Фурье, которая на интервале $(0, \pi)$ совпадает с нашей функцией $f\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$, причем ее аналитическое продолжение в отрицательную область значений α выполнено так, что $f^*\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$ становится четной функцией. Это обстоятельство позволяет сразу получать разложение по „e"-полиномам Чебышева 1 рода по соответствующим тригонометрическим рядам Фурье, а также распространить известные из теории рядов Фурье различные преобразования и тождества на эти ряды. В частности, отметим равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}}[f(t)]^2}{\sqrt{1-e^{-at}}}dt = \frac{\pi}{2a}\left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2\right], \qquad (2\text{-}15)$$

так как квадрат нормы $T_n^*(t)$ в рассматриваемом пространстве равен

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}}[\mathrm{T}_n^*(t)]^2}{\sqrt{1-e^{-at}}}\,\mathrm{dt} = \frac{\pi}{2a}. \qquad (2\text{-}16)$$

Отметим также правило умножения ряда (2-12) на полином $\mathrm{T}_m^*(t)$. Если имеет место разложение (2-12), то

$$f(t)\cdot\mathrm{T}_m^*(t) = \frac{A_m}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}(A_{\kappa+m} + A_{|\kappa-m|})\,\mathrm{T}_\kappa^*(t). \qquad (2\text{-}17)$$

Формула следует из правила умножения ряда (2-13) на $\cos m\alpha$ [5]. Рассмотрим разложения некоторых функций в ряд по „e"-полиномам Чебышева 1 рода. Нанем с разложения экспоненциальной функции с комплексным параметром. Имеем

$$e^{-pt} = \frac{A_0(p)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(p)\,\mathrm{T}_n^*(t). \qquad (2\text{-}18)$$

Ряд будет сходиться равномерно для любого вещественного значения „a", если $Re\, p > -\frac{a}{2}$. Согласно (2-11) и (2-14) можно написать

$$A_n(p) = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-pt} e^{-\frac{at}{2}} \mathrm{T}_n^*(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} \mathrm{dt} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2p}{a}} \cos n\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{2p}{a}} \cos 2n \, \mathrm{dx}. \tag{2-19}$$

Последний интеграл является табличным [4]:

$$A_n(p) = \frac{4}{2^{2\left(\frac{p}{a}+1\right)}\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right) \mathrm{B}\left(\frac{p}{a}+n+1, \frac{p}{a}+1-n\right)}. \tag{2-20}$$

Бета-функция имеет представление

$$\mathrm{B}\left(\frac{p}{a}+n+1,\ \frac{p}{a}+1-n\right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{a}+n\right)\left(\frac{p}{a}-n\right)\Gamma\left(\frac{p}{a}+n\right)\Gamma\left(\frac{p}{a}-n\right)}{\Gamma\left(2\frac{p}{a}+2\right)}.$$

После ряда преобразований будем иметь

$$A_n(p) = \frac{2\Gamma\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)\left(\frac{p}{a}+n\right)} \prod_{\kappa=1}^{n-1} \frac{p-\kappa a}{p+\kappa a}, \tag{2-21}$$

причем при $n = 0,1$

$$\prod_{\kappa=1}^{n-1} \frac{p-\kappa a}{p+\kappa a} = 1.$$

Искомое разложение получает вид

$$e^{-pt} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \left[\frac{a}{p} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{p}{a}+n} \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{p-\kappa a}{p+\kappa a} \mathrm{T}_n^*(t)\right]. \tag{2-22}$$

Из (2-19) следует, что

$$A_n(p) \risingdotseq \frac{2a}{\pi} \frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}} \mathrm{T}_n^*(t) = \frac{2a}{\pi} W(t)\, T_n^*(t), \tag{2-23}$$

т. е. $A_n(p)$ есть преобразование Лапласа функции $\frac{2a}{\pi} W(t)\, \mathrm{T}_n^*(t)$. Соответственно

$$A_0(p) \risingdotseq \frac{2a}{\pi} W(t). \tag{2-24}$$

Пусть τ — фиксированное значение t, тогда

$$e^{-p\tau}=\frac{A_0(p)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(p)\,\mathrm{T}_n^*(t). \qquad (2\text{-}25)$$

Учитывая, что $e^{-p\tau}\doteqdot\delta(t-\tau)$, а также (2-24) и (2-25), получим разложение дельта-функции в ряд по „e"-полиномам $T_n^*(t)$.

$$\delta(t-\tau)=\frac{a}{\pi}W(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n^*(\tau)\,\mathrm{T}_n^*(t)\right], \qquad (2\text{-}26)$$

или в другой Форме, если иметь в виду, что $\delta(t-\tau)=\delta(\tau-t)$,

$$\delta(t-\tau)=\frac{a}{\pi}W(\tau)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{T}_n^*(\tau)\cdot\mathrm{T}_n^*(t)\right]. \qquad (2\text{-}27)$$

Отметим частный случай, когда $p=ma$ $(m=1,2\ldots)$. Разложение (2-22) в этом случае автоматически обрывается при $n=m$ и получает вид

$$e^{-mat}=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)}\left[\frac{1}{m}+2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{m+n}\prod_{\kappa=1}^{n-1}\frac{m-\kappa}{m+\kappa}\mathrm{T}_n^*(\mathrm{T})\right]. \qquad (2\text{-}28)$$

Эта формула дает представление степеней $(e^{-at})^m$ в виде линейной комбинации конечного числа полиномов Чебышева $\mathrm{T}_n^*(t)$.

Для нескольких первых значений m будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
e^{-at}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{T}_1^*(t)\\
e^{-2at}&=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\mathrm{T}_1^*(t)+\frac{1}{8}\mathrm{T}_2^*(t)\\
e^{-3at}&=\frac{5}{16}+\frac{15}{32}\mathrm{T}_1^*(t)+\frac{3}{16}\mathrm{T}_2^*(t)+\frac{1}{32}\mathrm{T}_3^*(t)\\
e^{-4at}&=\frac{25}{128}+\frac{7}{16}\mathrm{T}_1^*(t)+\frac{7}{32}\mathrm{T}_2^*(t)+\frac{1}{16}\mathrm{T}_3^*(t)+\frac{1}{128}\mathrm{T}_4^*(t)\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}29)$$

Из разложения (2-22), используя формулу (1-21), можно получить разложение для t, однако проще воспользоваться тригонометрическим тождеством [5]

$$-\ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa}\cos\kappa\alpha.$$

Если выполнить подстановку (2-4), то получим

$$at=2\ln 2+2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa}\mathrm{T}_{\kappa}^*(t) \quad 0\leqslant t<\infty. \qquad (2\text{-}30)$$

Формула (2-17) дает

$$at\cdot\mathrm{T}_1^*(t)=-1+\left(\frac{1}{2}+2\ln 2\right)\mathrm{T}_1^*(t)-2\sum_{\kappa=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\kappa}{\kappa^2-1}\mathrm{T}_{\kappa}^*(t). \qquad (2\text{-}31)$$

Имея в виду, что

$$ate^{-at}=\frac{1}{2}\left[at+at\,\mathrm{T}_1^*(t)\right],$$

легко найдем разложение для ate^{-at}

$$ate^{-at} = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\ln 2 - \frac{3}{4}\right) \mathrm{T}_1^*(t) - \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa(\kappa^2-1)} \mathrm{T}_\kappa^*(t). \qquad (2\text{-}32)$$

Отметим еще некоторые разложения, непосредственно следующие из соответствующих тригонометрических тождеств.

В частности, можем написать следующее представление целых положительных степеней „e"-полинома $\mathrm{T}_m^*(t)$:

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{T}_m^*(t)]^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{\kappa=0}^{n-1} 2\binom{2n}{\kappa} \mathrm{T}_{2m(n-\kappa)}^*(t) + \binom{2n}{n}\right]. \\ [\mathrm{T}_m^*(t)]^{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \binom{2n-1}{\kappa} \mathrm{T}_{m(2n-2\kappa-1)}^*(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}33)$$

Формулы получаются из разложения $(\cos m\alpha)^{2n}$ и $(\cos m\alpha)^{2n-1}$ в ряды Фурье путем перехода к переменной t по формуле (2-4) [4]. Символом $\binom{2n}{\kappa}$ обозначен биноминальный коэффициент.

Известно следующее представление обыкновенных полиномов Лежандра [4].

$$P_n(\cos\alpha) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}\left[\cos n\alpha + \frac{1}{1}\,\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\alpha + \cdots\right] =$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2m-1)!!}{m!} \prod_{\kappa=0}^{m-1} \frac{n-\kappa}{2n-(2\kappa+1)} \cos(n-2m)\alpha.$$

Осуществляя подстановку (2-4), получим

$$P_n^*(t) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2m-1)!!}{m!} \prod_{\kappa=0}^{m-1} \frac{n-\kappa}{2n-(2\kappa+1)} \mathrm{T}_{n-2m}^*(t), \qquad (2\text{-}34)$$

причем $\prod_{\kappa=0}^{m-1} \equiv 1$ при $m=0$, а $\left[\frac{n}{2}\right]$ означает целую часть. Формула (2-34) дает представление „e"-полинома Лежандра в виде линейной комбинации „e"-полиномов Чебышева 1 рода.

3. «е»- полиномы Чебышева II рода

Эти полиномы могут быть определены соотношением

$$U_n^*(t) = \frac{1}{2(n+1)}\,\frac{d}{d(e^{-at})}\mathrm{T}_{n+1}^*(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos(2e^{-at}-1)}{2e^{-\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}}. \qquad (3\text{-}1)$$

Подстановка (2-4) даст выражение

$$U_n^*(t) \to \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3\text{-}2)$$

Полиномы $U_n^*(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{at}{2}}(1-e^{-at})^{\frac{3}{2}}\frac{dU_n^*(t)}{dt}\right]+n(n+2)a^2e^{-\frac{3}{2}at}(1-e^{-at})^{\frac{1}{2}}U_n^*(t)=0. \tag{3-3}$$

Основная рекуррентная формула имеет вид

$$U_{n+1}^*(t)=2(2e^{-at}-1)U_n^*(t)-U_{n-1}^*(t). \tag{3-4}$$

Ранее мы определили $U_n^*(t)$ как частный случай „e"-полиномов Якоби, однако, чтобы было соответствие с предыдущими формулами, необходимо положить

$$U_n^*(t)=(-1)^n(n+1)F\left(-n,\ n+2;\ \frac{3}{2};\ e^{-at}\right) \tag{3-5}$$

или в развернутой форме

$$U_n^*(t)=(-1)^n\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{(-1)^\kappa 2^\kappa(n+\kappa+1)!\,e^{-\kappa at}}{(2\kappa+1)(n-\kappa)!\,\kappa!\,(2\kappa-1)!!}, \tag{3-5"}$$

откуда следует

$$U_n^*(0)=n+1 \text{ и } U_n^*(\infty)=(-1)^n(n+1). \tag{3-6}$$

Полиномы $U_n^*(t)$ можно выразить через „e"-полиномы $T_n^*(t)$. Имеют место тождества [4]

$$\frac{\sin 2n\alpha}{\sin\alpha}=2\sum_{\kappa=1}^{n}\cos(2\kappa-1)\alpha,$$

$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}=2\sum_{\kappa=0}^{n}\cos 2\kappa\alpha-1.$$

Учитывая (2-4), а также, что $T_0^*(t)=\frac{1}{2}$, получим

$$\left.\begin{aligned}U_{2n-1}^*(t)&=2\sum_{\kappa=1}^{n}T_{2\kappa-1}^*(t)\quad(n=1,2,\dots)\\ U_{2n}^*(t)&=2\sum_{\kappa=0}^{n}T_{2\kappa}^*(t)\quad(n=0,1\dots).\end{aligned}\right\} \tag{3-7}$$

Отметим еще следующие соотношения, вытекающие из соответствующих тригонометрических тождеств:

$$\left.\begin{aligned}U_n^*(t)\cdot T_m^*(t)&=\frac{1}{2}\left[U_{n+m}^*(t)+U_{n-m}^*(t)\right]\\ T_{n+1}^*(t)\cdot U_{m-1}^*(t)&=\frac{1}{2}\left[U_{n+m}^*(t)-U_{n-m}^*(t)\right].\end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

Полагая в последней формуле $m=1$, получим

$$T_{n+1}^*(t)=\frac{1}{2}\left[U_{n+1}^*(t)-U_{n-1}^*(t)\right]\quad(n=1,2\dots)$$

или

$$T_n^*(t)=\frac{1}{2}\left[U_n^*(t)-U_{n-2}^*(t)\right]\quad(n=2,3\dots). \tag{3-9}$$

Как уже отмечалось, „e"-полиномы $U_n^*(t)$ образуют полную систему, ортогональную на интервале $(0,\infty)$ с весом $e^{-\frac{3}{2}at}\sqrt{1-e^{-at}}$, т. е.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}at}\sqrt{1-e^{-at}}\,U_n^*(t)\cdot U_m^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{8a} & m = n. \end{cases} \tag{3-10}$$

Всякая кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}at}\sqrt{1-e^{-at}}\,[f(t)]^2\,dt < \infty,$$

может быть разложена в ряд по полиномам $U_n^*(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n U_n^*(t), \tag{3-11}$$

где

$$D_n = \frac{8a}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}at}\sqrt{1-e^{-at}}\,f(t)\,U_n^*(t)\,dt \tag{3-12}$$

или в другой форме, если сделать подстановку (2-4),

$$D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha\,d\alpha. \tag{3-13}$$

Если иметь в виду тождество

$$\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos n\alpha - \frac{1}{2}\cos(n+2)\alpha$$

и учесть (2-14), то получим

$$D_n = \frac{1}{2}(A_n - A_{n-2}) \quad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots). \tag{3-14}$$

Таким образом, коэффициенты разложения $f(t)$ по «*е*»-полиномам $U_n^*(t)$ связаны с коэффициентами разложения той же функции по «*е*»-полиномам Чебышева I рода, элементарной формулой $(3 = 14)$.

4. Экспоненциальные функции Чебышева III рода

Если в уравнении (2-1) произвести преобразование независимой переменной согласно (2-4), то оно получает вид

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} + n^2y = 0 \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Два линейно независимых решения этого уравнения будут равны

$$y_{\mathrm{I}} = \cos n\alpha,\ \ y_{\mathrm{II}} = \sin n\alpha.$$

Если вернуться к прежней переменной, то первое частное решение преобразуется в последовательность «*е*»-полиномов Чебышева I рода — $T_n^*(t)$, а второе — в последовательность функций вида

$$S_n(t) = 2e^{-\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}\,U_{n-1}^*(t), \tag{4-1}$$

которые мы будем называть экспоненциальными функциями Чебышева III рода. Эти функции уже не будут полиномами, как это имело место для $T_n^*(t)$ и $U_n^*(t)$. Основное их свойство состоит в том, что они, являясь собственными функциями дифференциального оператора Штурма-Лиувилля, образуют на интервале $(0, \infty)$ систему, полную и ортогональную с весом

$$W(t) = e^{-\frac{at}{2}} (1 - e^{-at})^{-\frac{1}{2}}.$$

В самом деле, учитывая (4-1) и (3-10), будем иметь

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} S_n(t) \cdot S_m(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} dt = 4 \int\limits_0^\infty e^{-\frac{3}{2}at} \sqrt{1 - e^{-at}}\, U^*_{n-1}(t) U^*_{m-1}(t)\, dt = \begin{matrix} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2\alpha} & m = n. \end{matrix}$$

Основные функциональные соотношения для $S_n(t)$ так же, как и для $T^*_n(t)$, непосредственно получаются из известных тригонометрических тождеств. В частности, имеем

$$\begin{aligned} S_{n\pm m}(t) &= S_n(t) \cdot T^*_m(t) \pm T^*_n(t) \cdot S_m(t), \\ T^*_{n\pm m}(t) &= T^*_n(t) \cdot T^*_m(t) \mp S_n(t) \cdot S_m(t), \\ S_n(t) \cdot S_m(t) &= \frac{1}{2} [T^*_{n-m}(t) - T^*_{n+m}(t)], \\ S_n(t) \cdot T^*_m(t) &= \frac{1}{2} [S_{n-m}(t) - S_{n+m}(t)]. \end{aligned} \tag{4-2}$$

Полагая в последнем соотношении $m = 1$ и учитывая, что

$$T^*_1(t) = 2e^{-at} - 1,$$

получим основную рекуррентную формулу для рассматриваемых функций

$$2(2e^{-at} - 1) S_n(t) = S_{n-1}(t) + S_{n+1}(t). \tag{4-3}$$

Из (4-1) следует: $S_n(0) = S_n(\infty) = 0$. Имеют место следующие тождества [5]:

$$\sin(2n+1)\alpha = \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{4(2n+1)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\alpha}{(2m)^2 - (2n+1)^2} \quad (n=0, 1, 2\ldots),$$

$$\sin 2n\alpha = -\frac{8n}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\alpha}{(2m-1)^2 - (2n)^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Они представляют собой разложения синусоидальных „пакетов", заданных на интервале $(0, \pi)$, в ряд по косинусам. Преобразование (2-4) дает

$$\left.\begin{aligned} S_{2n+1}(t) &= \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{4(2n+1)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T^*_{2m}(t)}{(2m)^2 - (2n+1)^2} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots), \\ S_{2n}(t) &= -\frac{8n}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T^*_{2m-1}(t)}{(2m-1)^2 - (2n)^2} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{4-4}$$

т. е. функции $S_n(t)$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ разлагаются в бесконечные ряды по „e"-полиномам Чебышева I рода.

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции в ряд по функциям $S_n(t)$.

Условие (2-9) оказывается достаточным для сходимости разложения

$$f(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa S_\kappa(t) \tag{4-5}$$

14*.

во всякой точке, являющейся точкой непрерывности $f(t)$, если коэффициенты $B_к$ определить формулой

$$B_к = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t) S_к(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin к\alpha d\alpha. \quad (4\text{-}6)$$

В точках разрыва I рода ряд (4-5) сходится к значению $\frac{1}{2}[f(t_i+0)-$ $-f(t_i-0)]$. Если произвести замену переменной согласно (2-4), то (4-5) преобразуется к виду

$$f\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sum_{к=1}^{\infty} B_к \sin к\alpha \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \quad (4\text{-}7)$$

Ряд (4-7) можно рассматривать как разложение некоторой периодической функции $f^*\left(-\frac{1}{a}\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$, которая на интервале $(0, \pi)$ совпадает с заданной функцией и которую мы сконструировали таким образом, что она стала нечетной.

В качестве примера рассмотрим разложение единичной ступенчатой функции $1(t-\tau)$. Коэффициенты разложения будут равны

$$B_к = \frac{2a}{\pi}\int_\tau^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} S_к(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_\tau}^\pi \sin к\alpha d\alpha = \frac{2\left[T_к^*(\tau)-(-1)^к\right]}{\pi к}, \quad (4\text{-}8)$$

так как $\cos к\alpha_\tau = T_к^*(\tau)$. Разложение имеет вид

$$1(t-\tau) = \frac{2}{\pi}\sum_{к=1}^{\infty}\frac{T_к^*(\tau)-(-1)^к}{к} S_к(t). \quad (4\text{-}9)$$

В частном случае, когда $\tau = 0$, получим после преобразований

$$1(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{к=1}^{\infty}\frac{1}{2к-1} S_{2к-1}(t). \quad (4\text{-}10)$$

Многочисленные разложения можно получить из соответствующих тригонометрических рядов и тождеств, путем преобразования переменной.

Заключение

Свойства рассмотренных ортогональных функций и различные примеры, имеющие самостоятельное значение и иллюстрирующие технику разложения разнообразных функций в обобщенные ряды Фурье, показывают, что предлагаемый аналитический аппарат может быть эффективно использован не только для целей приближения функций, но и для решения других задач теоретического и прикладного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Изд. «Наука», М., 1965.
2. Б. М. Будак, С. В. Фомин. Кратные интегралы и ряды. Изд. «Наука», М., 1965.
3. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. Физматгиз, М., 1958.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

5. А. М. Заездный. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. Госэнергоиздат, М., 1961.
6. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
7. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л. 1963.
8. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
9. Таблицы полиномов Чебышева Sn(x) и Cn(x). Выпуск 19. Вычислительный центр АН СССР, М., 1963.