

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ СИГНАЛОВ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научным семинаром кафедр автоматики и телемеханики
и автоматических систем)

Как известно [3, 6, 8], собственные функции самосопряженного дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с самосопряженными краевыми условиями, образуют ортогональную относительно некоторого веса систему функций, полную в пространстве $L^2 \rho(x)$, т. е.

$$\int_a^b \rho(x) U_i(x) U_k(x) dx = \begin{cases} = 0 & i \neq k \\ \neq 0 & i = k \end{cases}$$

где $\rho(x)$ — весовая функция, $U_i(x)$ и $U_k(x)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_i и λ_k . В частности, гипергеометрическая функция

$$F(\alpha; \beta; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} x^k \quad (1)$$

при определенном соотношении постоянных есть решение задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения, самосопряженная форма которого имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} U' \right] - \alpha\beta x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} U = 0. \quad (2)$$

Это уравнение, называемое гипергеометрическим, представляет весьма значительный интерес для приложений.

Если параметр α или β есть целое отрицательное число (или нуль), то ряд (1) обрывается и становится полиномом соответствующей степени. Это обстоятельство, если рассматривать интервал (0,1), приводит к самосопряженным граничным условиям при

$$\gamma > 0; \alpha + \beta - 1 - \gamma > 0. \quad (3)$$

Если положить

$$\alpha = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad \beta = n + \gamma + \delta - 1,$$

то гипергеометрическая функция образует последовательность полиномов

$$P_n^{\gamma\delta}(x) = F(-n, n + \gamma + \delta - 1; \gamma; x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

которые называются полиномами Якоби [4,6,8].

При любых γ и δ , удовлетворяющих условиям (3), полиномы Якоби ортогональны с весом

$$\rho(x) = x^{\gamma-1} (1-x)^{\delta-1} \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

Введем подстановку $x = e^{-at}$, которая преобразует интервал (0,1) в интервал (0, ∞) для новой переменной t . В результате последовательность (4) преобразуется в новую последовательность полиномов, но уже относительно e^{-at} . Это экспоненциальные полиномы Якоби или сокращенно „ e “ — полиномы. Обозначим их прежним символом, но вместо аргумента x будем ставить t .

$$P_n^{(\gamma, \delta)}(e^{-at}) = P_n^{(\gamma, \delta)}(t) = F(-n, n + \gamma + \delta - 1; \gamma; e^{-at}). \quad (6)$$

Параметр « a » — вещественный и положительный. Легко проверить, что « e »-полиномы Якоби ортогональны на интервале (0, ∞) относительно веса

$$W(t) = e^{-\gamma at} (1 - e^{-at})^{\delta-1}. \quad (7)$$

Наибольший интерес представляют следующие частные значения γ и δ

$$1. \quad \gamma = \delta = \frac{1}{2}; \quad W(t) = e^{-\frac{at}{2}} (1 - e^{-at})^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(t) = T_n^*(t) = F(-n, n; \frac{1}{2}; e^{-at}). \quad (8)$$

Мы получаем „ e “ — полиномы Чебышева I рода.

$$2. \quad \gamma = \delta = 1; \quad W(t) = e^{-at},$$

$$P_n^{(1,1)}(t) = P_n^*(t) = F(-n, n + 1; 1; e^{-at}). \quad (9)$$

тот случай дает „ e “-полиномы Лежандра.

$$3. \quad \gamma = \delta = \frac{3}{2}; \quad W(t) = e^{-\frac{3}{2}at} (1 - e^{-at})^{\frac{1}{2}},$$

$$P_n^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}(t) = U_n^*(t) = F\left(-n, n + 2; \frac{3}{2}; e^{-at}\right), \quad (10)$$

В этом случае имеем « e »-полиномы Чебышева II рода

1. Разложение некоторых функций в ряды по « e »-полиномам Лежандра

Экспоненциальные полиномы Лежандра удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - e^{-at}) \frac{dP_n^*(t)}{dt} \right] + n(n+1) a^2 e^{-at} P_n^*(t) = 0. \quad (1=1)$$

Их явное выражение сразу получается путем развертывания гипергеометрического ряда [1, 7]:

$$P_n^*(t) = F(-n, n + 1; 1; e^{-at}) = \sum_{\kappa=0}^n (-1)^\kappa \frac{(n + \kappa)!}{(\kappa!)^2 (n - \kappa)!} e^{-\kappa at}, \quad (1-2)$$

$$P_0^*(t) = 1; \quad P_1^*(t) = 1 - 2e^{-at}; \quad P_2^*(t) = 1 - 6e^{-at} + 6e^{-2at};$$

$$P_3^*(t) = 1 - 12e^{-at} + 30e^{-2at} - 20e^{-3at} \text{ и т. д.}$$

Заметим, что значения коэффициентов ряда (1-2) совпадают с соответствующими значениями коэффициентов смещенных полиномов Лежандра, определенных на интервале (0,1).

В [6] приведены эти коэффициенты для $n = 14$ включительно. Отметим также, что „ e “-полиномы Лежандра можно получить из обычных полиномов, определенных на интервале $(-1, 1)$, если сделать замену $x \rightarrow 1 - 2e^{-at}$ и выполнить необходимые преобразования. Таким образом, все соотношения, выведенные для обычных полиномов, сохраняют силу и для „ e “-полиномов, если сделать указанную подстановку. Следует, однако, иметь в виду, что

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_n^*(t)}{dt} \cdot \frac{e^{at}}{2a}.$$

Рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных „ e “-полинома, имеет вид [7]

$$(n+1)P_{n+1}^*(t) - (2n+1)(1-2e^{-at})P_n^*(t) + nP_{n-1}^*(t) = 0. \quad (1-3)$$

Далее можно получить

$$\frac{dP_{n+1}^*(t)}{dt} - \frac{dP_{n-1}^*(t)}{dt} = (2n+1)2ae^{-at}P_n^*(t). \quad (1-4)$$

Справедливы также соотношения

$$P_n^*(0) = (-1)^n; P_n^*(\infty) = 1, \quad (1-5)$$

$$|P_n^*(t)| \leq 1 \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (1-6)$$

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции, заданной на интервале $(0, \infty)$, в ряд по „ e “-полиномам Лежандра. Предположим, что имеет место разложение

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^*(t). \quad (1-7)$$

Сходимость этого ряда устанавливается следующей теоремой:

„Если $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} e^{-at} [f(t)]^2 dt < \infty, \quad (1-8)$$

то разложение (1-7) с коэффициентами

$$c_n = a(2n+1) \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) P_n^*(t) dt \quad (1-9)$$

сходится к $f(t)$ во всякой внутренней точке интервала $(0, \infty)$, являющейся точкой непрерывности этой функции». Эта теорема является аналогом известной теоремы о разложении произвольной функции, заданной на интервале $(-1, 1)$, в ряд по обыкновенным полиномам Лежандра [7]. Коэффициенты разложения (1-9) легко могут быть получены по заданному преобразованию Лапласа функции $f(t)$.

Пусть $F(p)$ есть преобразование Лапласа функции $f(t)$, т. е.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

тогда, учитывая (1-2), можем написать

$$c_n = a(2n+1) \sum_{\kappa=0}^n (-1)^\kappa \frac{(n+\kappa)!}{(\kappa!)^2 (n-\kappa)!} \int_0^\infty e^{-(\kappa+1)at} f(t) dt =$$

$$= a(2n+1) \sum_{\kappa=0}^n (-1)^\kappa \frac{(n+\kappa)!}{(\kappa!)^2 (n-\kappa)!} F[(\kappa+1)a], \quad (1-10)$$

где $F[(\kappa+1)a]$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$, в котором p заменено на $(\kappa+1)a$. Это обстоятельство позволяет выполнить обращение преобразования Лапласа в виде ряда по „ e^a “-полиномам Лежандра.

Отметим, что поскольку система „ e^a “-полиномов Лежандра полна в пространстве $L^2_{\omega(t)}$ [$\omega(t) = e^{-at}$], то имеет место равенство Парсеваля [8]

$$\int_0^\infty e^{-at} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n^2}{(2n+1)a}, \quad (1-11)$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-at} [P_n^*(t)]^2 dt = \frac{1}{(2n+1)a}. \quad (1-12)$$

Найдем преобразование Лапласа „ e^a “-полинома $P_n^*(t)$. Имеем

$$P_n(p) = \int_0^\infty e^{-pt} P_n^*(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} F(-n, n+1; 1; e^{-at}) dt. \quad (1-13)$$

Если сделать подстановку $x = e^{-at}$, то получим табличный интеграл [4]

$$P_n(p) = \frac{1}{a} \int_0^1 x^{\frac{p}{a}-1} F(-n, n+1; 1; x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right) \cdot \Gamma\left(1+n-\frac{p}{a}\right)}{a \Gamma\left(1-\frac{p}{a}\right) \cdot \Gamma\left(1+n+\frac{p}{a}\right)}.$$

Поскольку

$$\frac{\Gamma\left(1+n-\frac{p}{a}\right)}{\Gamma\left(1+n+\frac{p}{a}\right)} = \frac{\left(n-\frac{p}{a}\right)\left(n-1-\frac{p}{a}\right)\dots\left(1-\frac{p}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{a}\right)}{\left(n+\frac{p}{a}\right)\left(n-1+\frac{p}{a}\right)\dots\left(1+\frac{p}{a}\right)\frac{p}{a}\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)},$$

окончательно будем иметь

$$P_n(p) = \frac{1}{p} \prod_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\kappa+1)a-p}{(\kappa+1)a+p} \doteq P_n^*(t). \quad (1-13)$$

Рассмотрим теперь разложение экспоненциальной функции

$$f(t) = e^{-pt}, \quad (1-14)$$

(где p — комплексный параметр) в ряд по „ e^a “-полиномам Лежандра,

которое порождает большое число других полезных разложений. Условие (1-8) будет выполнено, если $Re p > -\frac{a}{2}$. Найдем коэффициенты $D_n(p)$ ряда

$$e^{-pt} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(p) P_n(t). \quad (1-15)$$

Согласно общей формуле (1-9) имеем

$$D_n(p) = a(2n+1) \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} P_n^*(t) dt.$$

Сравнивая с (1-13), убеждаемся, что

$$D_n(p) = a(2n+1) P_n(p+a) = \frac{(2n+1)a}{p+a} \prod_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\kappa a - p}{(2+\kappa)a+p}. \quad (1-16)$$

Таким образом,

$$e^{-pt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)a}{p+a} \prod_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\kappa a - p}{(2+\kappa)a+p} P_n^*(t). \quad (1-17)$$

Заметим, что ряд сходится равномерно, если $Re p > -\frac{a}{2}$. Предполо-

жим, что p — вещественная величина и, в частности, кратная „ a “, т. е. $p = ma$ ($m = 1, 2, \dots$), тогда разложение (1-17) обрывается на $(m+1)$ -члене и получает вид

$$e^{-mat} = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{m+1} \prod_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\kappa - m}{2+\kappa+m} P_n^*(t). \quad (1-18)$$

Эта формула позволяет выразить степени e^{-at} в виде линейной комбинации конечного числа „ e “-полиномов. Для нескольких первых значений „ m “ будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e^{-at} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P_1^*(t) \\ e^{-2at} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} P_1^*(t) + \frac{1}{6} P_2^*(t) \\ e^{-3at} &= \frac{1}{4} - \frac{9}{20} P_1^*(t) + \frac{1}{4} P_2^*(t) - \frac{1}{20} P_3^*(t). \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

Пусть теперь $p = a + jb$, тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} e^{-at} \cos bt &= Re e^{-(a+jb)t}, \\ e^{-at} \sin bt &= -Im e^{-(a+jb)t}, \end{aligned}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} e^{-at} \cos bt &= Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)a}{2a+jb} \prod_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\kappa-1)a - jb}{(3+\kappa)a + jb} P_n^*(t) \\ e^{-at} \sin bt &= -Im \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)a}{2a+jb} \prod_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\kappa-1)a - jb}{(3+\kappa)a + jb} P_n^*(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

Эти разложения сходятся тем быстрее, чем меньше $\frac{b}{a}$. Из разло-

жени (1=5) можно получить разложение для функции $f(t) = at$, Очевидно,

$$t = - \frac{d}{dp} (e^{-pt})|_{p=0} \quad (1-21)$$

и следовательно, учитывая равномерную сходимость ряда (1-15)

$$t = - \sum_{n=0}^{\infty} D'_n(p) P_n^*(t)|_{p=0}. \quad (1-22)$$

Согласно (1-16) $D_n(p)$ можно представить в виде

$$D_0(p) = \frac{a}{p+a},$$

$$D_n(p) = - \frac{(2n+1) a p}{(p+a)(p+2a)} N_n(p) \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$N_n(p) = \prod_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\kappa a - p}{(2+\kappa)a + p} [N_1(p) = 1].$$

Производные будут равны

$$D'_0(p) = - \frac{a}{(p+a)^2},$$

$$D'_n(p) = - (2n+1) a \frac{2a^2 - p^2}{(p+a)^2 (p+2a)^2} N_n(p) - \frac{(2n+1) a p}{(p+a)(p+2a)} N'_n(p).$$

Полагая $p = 0$, будем иметь $[N'_n(0) \neq \infty]$;

$$D'_0(0) = - \frac{1}{a}; \quad D'_n(0) = - \frac{2n+1}{2a} N_n(0)$$

$$N_n(0) = \prod_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\kappa}{2+\kappa} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{3 \cdot 4 \dots (n-1) n (n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Окончательно получаем

$$D'_n(p)|_{p=0} = D'_n(0) = - \frac{2n+1}{an(n+1)},$$

Искомое разложение имеет вид

$$at = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^*(t); \quad 0 \leq t < \infty. \quad (1-23)$$

Аналогично можно получить разложение для te^{-at} , так как

$$te^{-at} = - \frac{d}{dp} (e^{-pt})|_{p=a}.$$

Проще, однако, воспользоваться правилом умножения ряда на экспоненциальный множитель. Пусть

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^*(t).$$

Найдем разложение для функции $e^{-at} f(t)$. Имеем

$$e^{-at} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-at} P_n^*(t).$$

Из основного рекуррентного соотношения (1-3) найдем

$$e^{-at}P_n^*(t) = \frac{1}{2}P_n^*(t) - \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}^*(t) - \frac{n+1}{2(2n+1)}P_{n+1}^*(t).$$

Подставляя это выражение в ряд и выполнив преобразование индексов, получим

$$e^{-at}f(t) = \frac{1}{2}\left(c_0 - \frac{1}{3}c_1\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n - \frac{n+1}{2n+3}c_{n+1} - \frac{n}{2n-1}c_{n-1}\right]P_n^*(t). \quad (1-24)$$

Умножим (1-23) на e^{-at} и воспользуемся формулой (1-24). В результате будем иметь искомое разложение

$$ate^{-at} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P_1^*(t) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}P_n^*(t). \quad (1-25)$$

Ряд сходится довольно быстро.

Рассмотрим разложение некоторых разрывных функций, которые широко используются в технических приложениях в качестве типовых воздействий.

Вернемся к разложению (1-15). Зафиксируем величину t , положив $t = \tau$, тогда будем иметь

$$e^{-p\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}D_n(p)P_n^*(\tau). \quad (1-26)$$

Если рассматривать (1-26) как результат преобразования по Лапласу некоторого временного соотношения, то последнее может быть найдено обращением обеих частей (1-26). Слева обращение дает дельта-функцию Дирака, т. е.

$$e^{-p\tau} \doteq \delta(t - \tau).$$

Учитывая (1-13) и (1-16), приходим к соответствию

$$D_n(p) \doteq a(2n+1)e^{-at}P_n^*(t). \quad (1-27)$$

В силу единственности преобразования Лапласа получим

$$\delta(t - \tau) = ae^{-at}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n^*(\tau)P_n^*(t) \quad (1-28)$$

или, учитывая, что $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$, ряд можно записать в виде

$$\delta(t - \tau) = ae^{-a\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n^*(\tau)P_n^*(t). \quad (1-29)$$

Разложения (1-28) и (1-29) должны пониматься в смысле слабой сходимости [2]. При $\tau = 0$ получим, учитывая (1-5),

$$\delta(t) = ae^{-at}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^nP_n^*(t) = a\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^nP_n^*(t) \quad (1-30)$$

или более точно

$$\delta(t) = ae^{-a|t|}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^nP_n^*(|t|), \quad (1-31)$$

так как $\delta(t)$ — функция четная. Заметим, что тот же результат можно получить непосредственно, определив коэффициенты по общей формуле (1-9).

Найдем разложение единичной функции со смещенным аргументом, т. е. функции

$$f(t) = 1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau \\ 1 & \tau \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Для коэффициентов имеем

$$C_n = a(2n + 1) \int_0^{\infty} 1(t - \tau) e^{-at} P_n^*(t) dt = a(2n + 1) \int_{\tau}^{\infty} e^{-at} P_n^*(t) dt.$$

Учитывая (1-4), получим

$$c_0 = e^{-a\tau}; \quad c_n = -\frac{1}{2} [P_{n+1}^*(\tau) - P_{n-1}^*(\tau)] \quad (n = 1, 2 \dots).$$

Искомое разложение имеет вид

$$1(t - \tau) = e^{-a\tau} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}^*(\tau) - P_{n-1}^*(\tau)] P_n^*(\tau). \quad (1-9)$$

Ряд сходится в среднем.

До сих пор мы совершенно не касались вопроса о величине параметра „ a “. Можно утверждать, что разложение произвольной функции по „ e “-полиномам Лежандра будет сходиться независимо от величины параметра „ a “, если выполнено условие (1-8). Однако, если ограничиться конечным числом членов, то точность аппроксимации будет уже существенно зависеть от величины параметра „ a “, причем тем сильнее, чем меньше взятый отрезок ряда. Параметр „ a “ может быть выбран из условия минимума квадратичной ошибки приближения отрезком ряда. Практически, однако, такой путь приводит к весьма громоздким выражениям и оказывается непригодным. Весовой множителем e^{-at} обеспечивается максимальную точность приближения на начальном участке, поэтому, если параметр „ a “ находить из условия точного равенства отрезка ряда значению $f(t)$ при $t = \infty$, то, как показывают расчеты, это значение параметра „ a “ будет близко к оптимальному.

Таким образом, задача сведется к решению уравнения

$$\sum_{n=0}^m c_n P_n^*(\infty) = \sum_{n=0}^m c_n = f(\infty) \neq \infty$$

c_n — зависит от „ a “. Это уравнение может быть решено хотя бы приближенно.

2. « e »-полиномы Чебышева I рода

Экспоненциальные полиномы Чебышева I рода являются частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[\sqrt{e^{at}(1 - e^{-at})} \frac{dT_n^*(t)}{dt} \right] + \frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-at}}} n^2 a^2 T_n^*(t) = 0. \quad (2-1)$$

Так же, как и в случае „ e “-полиномов Лежандра, эти полиномы могут быть получены из обычных полиномов Чебышева I рода путем замены *) $x \rightarrow 2e^{-at} - 1$. Все формулы, выведенные для обычных полиномов, сохраняют силу. В частности,

) Возможна замена $x \rightarrow 1 - 2e^{-at}$. В этом случае $T_n^(t)$ нужно умножить на $(-1)^n$.

$$A_n = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} T_n^*(t) dt. \quad (2-11)$$

Если учесть, что $T_0^*(t) = \frac{1}{2}$, то ряд (2-10) можно записать в виде

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n^*(t). \quad (2-12)$$

Если же выполнить замену (2-4), то получим

$$f(t) \rightarrow f^*\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\alpha, \quad (2-13)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^*\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cos n\alpha d\alpha. \quad (2-14)$$

Таким образом, мы имеем разложение некоторой периодической функции $f^*\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)$ в обычный ряд Фурье, которая на интервале $(0, \pi)$ совпадает с нашей функцией $f\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)$, причем ее аналитическое продолжение в отрицательную область значений α выполнено так, что $f^*\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)$ становится четной функцией. Это обстоятельство позволяет сразу получать разложение по „e“-полиномам Чебышева 1 рода по соответствующим тригонометрическим рядам Фурье, а также распространить известные из теории рядов Фурье различные преобразования и тождества на эти ряды. В частности, отметим равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2}} [f(t)]^2}{\sqrt{1-e^{-at}}} dt = \frac{\pi}{2a} \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \right], \quad (2-15)$$

так как квадрат нормы $T_n^*(t)$ в рассматриваемом пространстве равен

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2}} [T_n^*(t)]^2}{\sqrt{1-e^{-at}}} dt = \frac{\pi}{2a}. \quad (2-16)$$

Отметим также правило умножения ряда (2-12) на полином $T_m^*(t)$. Если имеет место разложение (2-12), то

$$f(t) \cdot T_m^*(t) = \frac{A_m}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (A_{\kappa+m} + A_{|\kappa-m|}) T_{\kappa}^*(t). \quad (2-17)$$

Формула следует из правила умножения ряда (2-13) на $\cos m\alpha$ [5]. Рассмотрим разложения некоторых функций в ряд по „e“-полиномам Чебышева 1 рода. Начнем с разложения экспоненциальной функции с комплексным параметром. Имеем

$$e^{-pt} = \frac{A_0(p)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(p) T_n^*(t). \quad (2-18)$$

Ряд будет сходиться равномерно для любого вещественного значения „ a “, если $Re p > -\frac{a}{2}$. Согласно (2-11) и (2-14) можно написать

$$\begin{aligned} A_n(p) &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt} e^{-\frac{at}{2}} T_n^*(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2p}{a}} \cos n\alpha d\alpha = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{2p}{a}} \cos 2n x dx. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Последний интеграл является табличным [4]:

$$A_n(p) = \frac{4}{2^2 \left(\frac{p}{a} + 1\right) \left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{p}{a} + n + 1, \frac{p}{a} + 1 - n\right)}. \quad (2-20)$$

Бета-функция имеет представление

$$\begin{aligned} B\left(\frac{p}{a} + n + 1, \frac{p}{a} + 1 - n\right) &= \\ &= \frac{\left(\frac{p}{a} + n\right) \left(\frac{p}{a} - n\right) \Gamma\left(\frac{p}{a} + n\right) \Gamma\left(\frac{p}{a} - n\right)}{\Gamma\left(2\frac{p}{a} + 2\right)}. \end{aligned}$$

После ряда преобразований будем иметь

$$A_n(p) = \frac{2\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a}\right) \left(\frac{p}{a} + n\right)} \prod_{\kappa=1}^{n-1} \frac{p - \kappa a}{p + \kappa a}, \quad (2-21)$$

причем при $n = 0, 1$

$$\prod_{\kappa=1}^{n-1} \frac{p - \kappa a}{p + \kappa a} = 1.$$

Искомое разложение получает вид

$$e^{-pt} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \left[\frac{a}{p} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{p}{a} + n} \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{p - \kappa a}{p + \kappa a} T_n^*(t) \right]. \quad (2-22)$$

Из (2-19) следует, что

$$A_n(p) \doteq \frac{2a}{\pi} \frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}} T_n^*(t) = \frac{2a}{\pi} W(t) T_n^*(t), \quad (2-23)$$

т. е. $A_n(p)$ есть преобразование Лапласа функции $\frac{2a}{\pi} W(t) T_n^*(t)$.

Соответственно

$$A_0(p) \doteq \frac{2a}{\pi} W(t). \quad (2-24)$$

легко найдем разложение для ate^{-at}

$$ate^{-at} = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\ln 2 - \frac{3}{4}\right) T_1^*(t) - \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa(\kappa^2-1)} T_\kappa^*(t). \quad (2-32)$$

Отметим еще некоторые разложения, непосредственно следующие из соответствующих тригонометрических тождеств.

В частности, можем написать следующее представление целых положительных степеней „ e “-полинома $T_m^*(t)$:

$$\left. \begin{aligned} [T_m^*(t)]^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} \left[\sum_{\kappa=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{\kappa} T_{2m(n-\kappa)}^*(t) + \binom{2n}{n} \right] \\ [T_m^*(t)]^{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \binom{2n-1}{\kappa} T_{m(2n-2\kappa-1)}^*(t). \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

Формулы получаются из разложения $(\cos m\alpha)^{2n}$ и $(\cos m\alpha)^{2n-1}$ в ряды Фурье путем перехода к переменной t по формуле (2-4) [4]. Символом $\binom{2n}{\kappa}$ обозначен биномиальный коэффициент.

Известно следующее представление обыкновенных полиномов Лежандра [4].

$$\begin{aligned} P_n(\cos \alpha) &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!} \left[\cos n\alpha + \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\alpha + \dots \right] = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2m-1)!!}{m!} \prod_{\kappa=0}^{m-1} \frac{n-\kappa}{2n-(2\kappa+1)} \cos(n-2m)\alpha. \end{aligned}$$

Осуществляя подстановку (2-4), получим

$$P_n^*(t) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2m-1)!!}{m!} \prod_{\kappa=0}^{m-1} \frac{n-\kappa}{2n-(2\kappa+1)} T_{n-2m}^*(t), \quad (2-34)$$

причем $\prod_{\kappa=0}^{m-1} \equiv 1$ при $m=0$, а $\left[\frac{n}{2}\right]$ означает целую часть. Формула (2-34) дает представление „ e “-полинома Лежандра в виде линейной комбинации „ e “-полиномов Чебышева I рода.

3. « e »-полиномы Чебышева II рода

Эти полиномы могут быть определены соотношением

$$U_n^*(t) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{d}{d(e^{-at})} T_{n+1}^*(t) = \frac{\sin(n+1) \arccos(2e^{-at}-1)}{2e^{-\frac{at}{2}} \sqrt{1-e^{-at}}}. \quad (3-1)$$

Подстановка (2-4) даст выражение

$$U_n^*(t) \rightarrow \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}. \quad (3-2)$$

Полиномы $U_n^*(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-\frac{at}{2}} (1 - e^{-at})^{\frac{3}{2}} \frac{dU_n^*(t)}{dt} \right] + n(n+2) a^2 e^{-\frac{3}{2}at} (1 - e^{-at})^{\frac{1}{2}} U_n^*(t) = 0. \quad (3-3)$$

Основная рекуррентная формула имеет вид

$$U_{n+1}^*(t) = 2(2e^{-at} - 1) U_n^*(t) - U_{n-1}^*(t). \quad (3-4)$$

Ранее мы определили $U_n^*(t)$ как частный случай „ e “-полиномов Якоби, однако, чтобы было соответствие с предыдущими формулами, необходимо положить

$$U_n^*(t) = (-1)^n (n+1) F \left(-n, n+2; \frac{3}{2}; e^{-at} \right) \quad (3-5)$$

или в развернутой форме

$$U_n^*(t) = (-1)^n \sum_{\kappa=0}^n \frac{(-1)^\kappa 2^\kappa (n+\kappa+1)! e^{-\kappa at}}{(2\kappa+1)(n-\kappa)! \kappa! (2\kappa-1)!!}, \quad (3-5^a)$$

откуда следует

$$U_n^*(0) = n+1 \text{ и } U_n^*(\infty) = (-1)^n (n+1). \quad (3-6)$$

Полиномы $U_n^*(t)$ можно выразить через „ e “-полиномы $T_n^*(t)$. Имеют место тождества [4]

$$\frac{\sin 2n\alpha}{\sin \alpha} = 2 \sum_{\kappa=1}^n \cos(2\kappa-1)\alpha,$$

$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin \alpha} = 2 \sum_{\kappa=0}^n \cos 2\kappa\alpha - 1.$$

Учитывая (2-4), а также, что $T_0^*(t) = \frac{1}{2}$, получим

$$\left. \begin{aligned} U_{2n-1}^*(t) &= 2 \sum_{\kappa=1}^n T_{2\kappa-1}^*(t) \quad (n=1, 2, \dots) \\ U_{2n}^*(t) &= 2 \sum_{\kappa=0}^n T_{2\kappa}^*(t) \quad (n=0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

Отметим еще следующие соотношения, вытекающие из соответствующих тригонометрических тождеств:

$$\left. \begin{aligned} U_n^*(t) \cdot T_m^*(t) &= \frac{1}{2} [U_{n+m}^*(t) + U_{n-m}^*(t)] \\ T_{n+1}^*(t) \cdot U_{m-1}^*(t) &= \frac{1}{2} [U_{n+m}^*(t) - U_{n-m}^*(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

Полагая в последней формуле $m=1$, получим

$$T_{n+1}^*(t) = \frac{1}{2} [U_{n+1}^*(t) - U_{n-1}^*(t)] \quad (n=1, 2, \dots)$$

или

$$T_n^*(t) = \frac{1}{2} [U_n^*(t) - U_{n-2}^*(t)] \quad (n=2, 3, \dots). \quad (3-9)$$

Как уже отмечалось, „ e “-полиномы $U_n^*(t)$ образуют полную систему, ортогональную на интервале $(0, \infty)$ с весом $e^{-\frac{3}{2}at} \sqrt{1 - e^{-at}}$, т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{2}at} \sqrt{1-e^{-at}} U_n^*(t) \cdot U_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{8a} & m = n. \end{cases} \quad (3-10)$$

Всякая кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{2}at} \sqrt{1-e^{-at}} [f(t)]^2 dt < \infty,$$

может быть разложена в ряд по полиномам $U_n^*(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n U_n^*(t), \quad (3-11)$$

где

$$D_n = \frac{8a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{2}at} \sqrt{1-e^{-at}} f(t) U_n^*(t) dt \quad (3-12)$$

или в другой форме, если сделать подстановку (2-4),

$$D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(-\frac{1}{\alpha} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha \cdot \sin(n+1)\alpha d\alpha. \quad (3-13)$$

Если иметь в виду тождество

$$\sin(n+1)\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos n\alpha - \frac{1}{2} \cos(n+2)\alpha$$

и учесть (2-14), то получим

$$D_n = \frac{1}{2} (A_n - A_{n-2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3-14)$$

Таким образом, коэффициенты разложения $f(t)$ по «e»-полиномам $U_n^*(t)$ связаны с коэффициентами разложения той же функции по «e»-полиномам Чебышева I рода, элементарной формулой (3-14).

4. Экспоненциальные функции Чебышева III рода

Если в уравнении (2-1) произвести преобразование независимой переменной согласно (2-4), то оно получает вид

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} + n^2 y = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Два линейно независимых решения этого уравнения будут равны

$$y_I = \cos n\alpha, \quad y_{II} = \sin n\alpha.$$

Если вернуться к прежней переменной, то первое частное решение преобразуется в последовательность «e»-полиномов Чебышева I рода — $T_n^*(t)$, а второе — в последовательность функций вида

$$S_n(t) = 2e^{-\frac{at}{2}} \sqrt{1-e^{-at}} U_{n-1}^*(t), \quad (4-1)$$

которые мы будем называть экспоненциальными функциями Чебышева III рода. Эти функции уже не будут полиномами, как это имело место для $T_n^*(t)$ и $U_n^*(t)$. Основное их свойство состоит в том, что они, являясь собственными функциями дифференциального операто-

ра Штурма-Лиувилля, образуют на интервале $(0, \infty)$ систему, полную и ортогональную с весом

$$W(t) = e^{-\frac{at}{2}} (1 - e^{-at})^{-\frac{1}{2}}.$$

В самом деле, учитывая (4-1) и (3-10), будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2}} S_n(t) \cdot S_m(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} dt = 4 \int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{2}at} \sqrt{1 - e^{-at}} U_{n-1}^*(t) U_{m-1}^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2\alpha} & m = n. \end{cases}$$

Основные функциональные соотношения для $S_n(t)$ так же, как и для $T_n^*(t)$, непосредственно получаются из известных тригонометрических тождеств. В частности, имеем

$$\begin{aligned} S_{n \pm m}(t) &= S_n(t) \cdot T_m^*(t) \pm T_n^*(t) \cdot S_m(t), \\ T_{n \pm m}^*(t) &= T_n^*(t) \cdot T_m^*(t) \mp S_n(t) \cdot S_m(t), \\ S_n(t) \cdot S_m(t) &= \frac{1}{2} [T_{n-m}^*(t) - T_{n+m}^*(t)], \\ S_n(t) \cdot T_m^*(t) &= \frac{1}{2} [S_{n-m}(t) - S_{n+m}(t)]. \end{aligned} \quad (4-2)$$

Полагая в последнем соотношении $m = 1$ и учитывая, что

$$T_1^*(t) = 2e^{-at} - 1,$$

получим основную рекуррентную формулу для рассматриваемых функций

$$2(2e^{-at} - 1)S_n(t) = S_{n-1}(t) + S_{n+1}(t). \quad (4-3)$$

Из (4-1) следует: $S_n(0) = S_n(\infty) = 0$. Имеют место следующие тождества [5]:

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)\alpha &= \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{4(2n+1)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\alpha}{(2m)^2 - (2n+1)^2} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ \sin 2n\alpha &= -\frac{8n}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\alpha}{(2m-1)^2 - (2n)^2} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Они представляют собой разложения синусоидальных „пакетов“, заданных на интервале $(0, \pi)$, в ряд по косинусам. Преобразование (2-4) дает

$$\left. \begin{aligned} S_{2n+1}(t) &= \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{4(2n+1)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{2m}^*(t)}{(2m)^2 - (2n+1)^2} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ S_{2n}(t) &= -\frac{8n}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{2m-1}^*(t)}{(2m-1)^2 - (2n)^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

т. е. функции $S_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) разлагаются в бесконечные ряды по „e“-полиномам Чебышева I рода.

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции в ряд по функциям $S_n(t)$.

Условие (2-9) оказывается достаточным для сходимости разложения

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t) \quad (4-5)$$

во всякой точке, являющейся точкой непрерывности $f(t)$, если коэффициенты B_κ определить формулой

$$B_\kappa = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t) S_\kappa(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) \sin \kappa \alpha d\alpha. \quad (4-6)$$

В точках разрыва I рода ряд (4-5) сходится к значению $\frac{1}{2} [f(t_i + 0) - f(t_i - 0)]$. Если произвести замену переменной согласно (2-4), то (4-5) преобразуется к виду

$$f\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa \sin \kappa \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (4-7)$$

Ряд (4-7) можно рассматривать как разложение некоторой периодической функции $f^*\left(-\frac{1}{a} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)$, которая на интервале $(0, \pi)$ совпадает с заданной функцией и которую мы сконструировали таким образом, что она стала нечетной.

В качестве примера рассмотрим разложение единичной ступенчатой функции $1(t - \tau)$. Коэффициенты разложения будут равны

$$B_\kappa = \frac{2a}{\pi} \int_\tau^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} S_\kappa(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} dt = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_\tau}^\pi \sin \kappa \alpha d\alpha = \frac{2 [T_\kappa^*(\tau) - (-1)^\kappa]}{\pi \kappa}, \quad (4-8)$$

так как $\cos \kappa \alpha_\tau = T_\kappa^*(\tau)$. Разложение имеет вид

$$1(t - \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{T_\kappa^*(\tau) - (-1)^\kappa}{\kappa} S_\kappa(t). \quad (4-9)$$

В частном случае, когда $\tau = 0$, получим после преобразований

$$1(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{2\kappa-1} S_{2\kappa-1}(t). \quad (4-10)$$

Многочисленные разложения можно получить из соответствующих тригонометрических рядов и тождеств, путем преобразования переменной.

Заключение

Свойства рассмотренных ортогональных функций и различные примеры, имеющие самостоятельное значение и иллюстрирующие технику разложения разнообразных функций в обобщенные ряды Фурье, показывают, что предлагаемый аналитический аппарат может быть эффективно использован не только для целей приближения функций, но и для решения других задач теоретического и прикладного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Изд. «Наука», М., 1965.
2. Б. М. Будаков, С. В. Фомин. Кратные интегралы и ряды. Изд. «Наука», М., 1965.
3. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. Физматгиз, М., 1958.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

5. А. М. Заездный. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. Госэнергоиздат, М., 1961.
 6. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
 7. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л. 1963.
 8. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
 9. Таблицы полиномов Чебышева $S_n(x)$ и $C_n(x)$. Выпуск 19. Вычислительный центр АН СССР, М., 1963.
-