ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 183 1968

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЛУЧЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА НА ОСНОВАНИЕ ЦИЛИНДРА

Ю. М. ТРИФОНОВ, Ю. А. ТРИФОНОВА

(Представлена кафедрой машин и аппаратов химических производств)

Исследование геометрических характеристик лучистого теплообмена необходимо для аналитического описания поля излучения, создаваемого данным телом, а также для математического описания динамических свойств тепловых объектов. Знание уравнений динамики позволяет, в свою очередь, производить выбор систем автоматического регулирования в стадии проектирования данного объекта.

В ряде случаев, например, электропечи непрерывной сушки изоляции проводов в кабельной промышленности, теплотехнические агрегаты могут быть представлены в виде условно замкнутой цилиндрической полости, длина которой превышает ее гидравлический диаметр в десять и более раз.

Рассмотрим цилиндрическую полость с диаметром поперечного сечения $D = 2R_0$, заполненную диатермической средой (рис. 1). Внутренняя поверхность полости предполагается серой, изотермической и оптически однородной.

При применении общей формулы для определения коэффициентов облученности [1] в случае элементарного цилиндрического кольца и основания цилиндра имеем

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{F_1} \int\limits_{F_1} \int\limits_{F_2} \frac{\cos\beta_N \cdot \cos\beta_M}{\pi \cdot s^2} \cdot dF_N \cdot dF_M, \tag{1}$$

где

dF_N и dF_M — элементарные площадки соответственно на цилиндрическом кольце и на основании цилиндра;

β_N и β_M — углы, составленные направлением излучения с нормалями к площадкам dF_N и dF_M.

s — расстояние между центрами площадок dF_N и dF_M,

F_1 и F_2 — площади соответственно элементарного цилиндрического кольца и основания цилиндра.

При обозначениях, как на рис. 1:

$$\left. \begin{aligned} & dF_N = R_0 \cdot dh \cdot d\alpha_N; \quad dF_M = r \cdot dr \cdot d\alpha_N; \\ & \cos\beta_N = \frac{R_0 - r \cdot \cos(\alpha_N - \alpha_M)}{s}; \qquad \cos\beta_M = \frac{h}{s}; \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Из геометрических соотношений можно вывести

$$s = \sqrt{R_0^2 + r^2 + h^2 - 2R_0 \cdot r \cdot \cos(\alpha_N - \alpha_M)}. \tag{3}$$

После подстановки уравнений (2) и (3) в (1) получим:

$$\varphi_{1,2}=\frac{1}{\pi F_1}\int\limits_0^{R_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{[R_0-r\cdot\cos(\alpha_N-\alpha_M)]\cdot h\cdot R_0\cdot dh\cdot d\alpha_N\cdot r\cdot dr\cdot d\alpha_M}{[R_0^2+r^2+h^2-2\,R_0\cdot r\cdot\cos(\alpha_N-\alpha_M)]^2}. \quad (4)$$

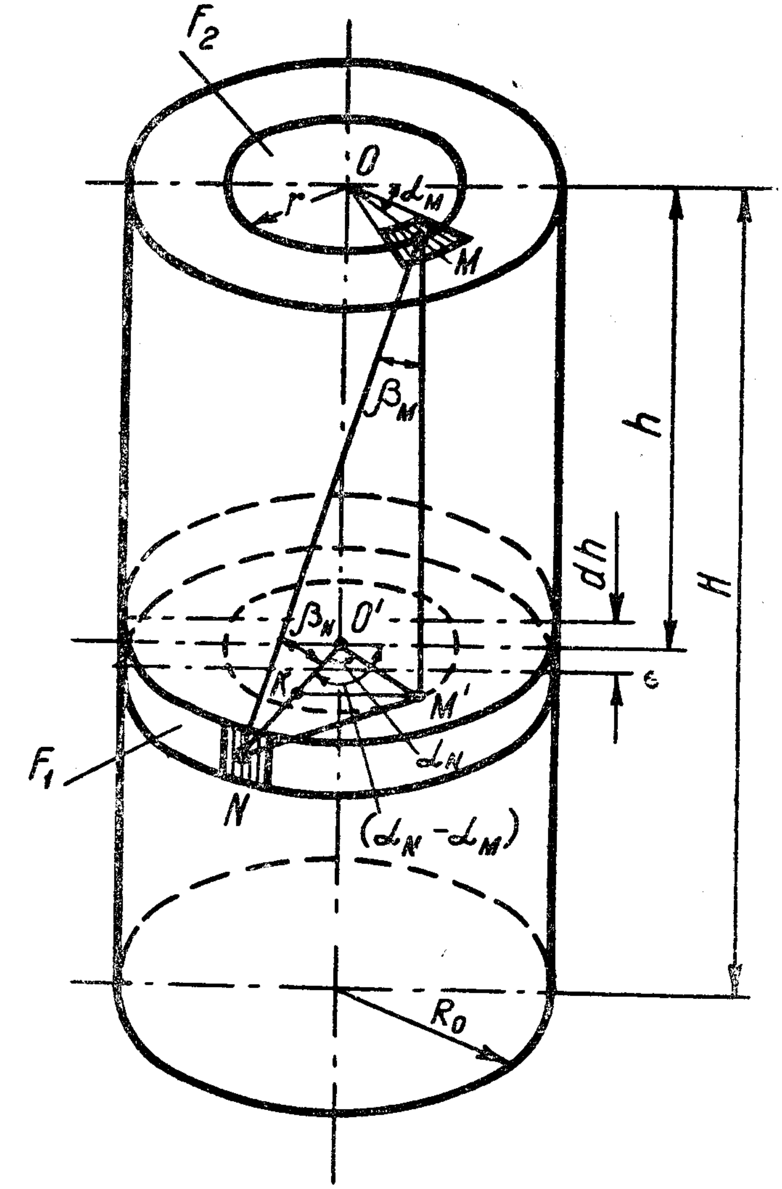

Рис. 1. К расчету коэффициента облученности

Проинтегрировав по α_N и обозначив результат первого интегрирования через I_1, имеем

$$I_1=\frac{2\,a\,(R_0\cdot b+r\cdot c)}{\sqrt{(b^2-c^2)^3}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg|_{-\alpha_M}^{2\pi-\alpha_M}, \quad (5)$$

где

$$a=\frac{h\cdot R_0\cdot dh\cdot r\cdot dr\cdot d\,\alpha_M}{\pi\cdot F_1};\quad b=h^2+R_0^2+r^2;$$

$$c=-2\,R_0\cdot r;\ \alpha=\alpha_N-\alpha_M.$$

Можно показать, что последующее интегрирование выражения (5) не дает возможности разрешить его в элементарных функциях [2].

Для получения приближенного решения исследуем поведение коэффициента перед $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при изменении отношения h/R_0. Обозначив этот коэффициент через κ, подставим в него выражения для b и c и после преобразований получим

$$\kappa = \sqrt{\frac{\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{R_0}+1\right)^2}{\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{R_0}-1\right)^2}}. \tag{6}$$

Очевидно, что при изменении отношения $\frac{h}{R_0}$ на отрезке $[0, \infty]$, значения коэффициента k лежат в интервале $[+\infty, 1]$.

В табл. 1 приведены данные расчета коэффициента κ по формуле (6) для различных значений отношения h/R_0.

Сравнение результатов показывает:

Таблица 1

h/R_0 \ r/R_0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	1,00	1,50	2,34	4,00	9,00	
0,5	1,00	1,38	1,90	2.82	3,46	4,12
1	1,00	1,22	1,48	1,75	2,02	2,24
2	1,00	1,08	1,17	1,26	1,34	1,41
3	1,00	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20
4	1,00	1,025	1,05	1,07	1,10	1,12
5	1,00	1,015	1,034	1.049	1,063	1,077
6	1,00	1,01	1,02	1,034	1,039	1,049
10	1,00	1,005	1,007	1,01	1,015	1,020

1) если отношение $h/R_0 = \mathrm{idem}$, то максимального значения κ достигает при $r/R_0 = 1$, а минимального—при $\frac{r}{R_0} = 0$;

2) при $\frac{h}{R_0} > 6$ коэффициент κ отличается от единицы не более чем на 5% и принимает значения в пределах

$$1 \leqslant \kappa \leqslant 1{,}049.$$

Обозначив $\operatorname{arctg}\left(\kappa \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$ через y, рассчитаем абсолютную Δy и относительную δ ошибки, которые возникнут при замене $\kappa = 1{,}05$ на $\kappa = 1$. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Приняв $\kappa = 1$, выражение (5) можно записать:

$$I_1 = \frac{2\pi a (R_0 b + rc)}{\sqrt{(b^2 - c^2)^3}}. \qquad (7)$$

Интегрирование соотношения (4) в пределах от $\alpha_M = 0$ до $\alpha_M = 2\pi$, от $r = 0$ до $r = R_0$ дает

$$\varphi_{1,2} = \frac{\pi \cdot h \cdot dh}{F_1} \cdot \left[\frac{h^2 + 2R_0^2}{\sqrt{h^4 + 4h^2 R_0^2}} - 1\right], \qquad (8)$$

где $F_1 = 2\pi R_0 \cdot dh$.

После преобразований формула (8) приобретает вид:

$$\varphi_{1,2} = \frac{\left(\frac{h}{D}\right)^2 + 0{,}5}{\sqrt{\left(\frac{h}{D}\right)^2 + 1}} - \frac{h}{D}. \qquad (9)$$

При $h/D \to \infty$ коэффициент $\varphi_{1,2} \to 0$, а при $h/D \to 0$ коэффициент $\varphi_{1,2} \to 0{,}5$, что соответствует физическому смыслу коэффициента облученности.

Таблица 2

$\frac{\alpha}{2}$	0°	1°	6°	12°	15°
Δy	0	3′	18′	37′	45′
δ [%]	0	4,75	4,76	4,9	4,75
$\frac{\alpha}{2}$	30°	45°	60°	75°	90°
Δy	1°13′	1°24′	1°13′	0°42′	0°
δ [%]	3,92	3,02	1,99	0,93	0

Для проверки полученного результата решим поставленную задачу методом лучевой алгебры [4].

Для замкнутой системы четырех тел F_1, F_2, F_3, F_4 (рис. 2) можем записать определяющие уравнения:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{1,1} + \bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} + \bar{\varphi}_{1,4} = 1 \\ \bar{\varphi}_{2,1} + \bar{\varphi}_{2,2} + \bar{\varphi}_{2,3} + \bar{\varphi}_{2,4} = 1 \\ \bar{\varphi}_{3,1} + \bar{\varphi}_{3,2} + \bar{\varphi}_{3,3} + \bar{\varphi}_{3,4} = 1 \\ \bar{\varphi}_{4,1} + \bar{\varphi}_{4,2} + \bar{\varphi}_{4,3} + \bar{\varphi}_{4,4} = 1 \end{cases} \qquad (10)$$

Для решения системы уравнений (10) относительно $\bar{\varphi}_{1,2}$ проведем делитель F_D на границе поверхностей F_1 и F_3 и воспользуемся выражением для коэффициента облученности круга на круг [3]-

$$\varphi = \left[\frac{h}{D} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{D}\right)^2}\right]^2. \qquad (11)$$

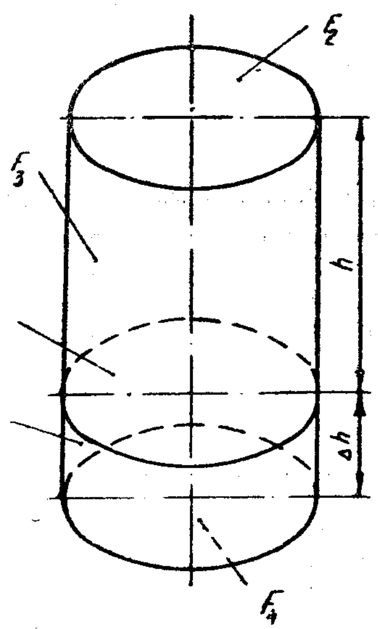

Рис. 2. Замкнутая система из четырех поверхностей

В результате имеем:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = (\bar{\varphi}_{D,2} - \bar{\varphi}_{4,2}) \frac{D}{4 \cdot \Delta h}, \qquad (12)$$

где

$\bar{\varphi}_{1,2}$ — коэффициент облученности бесконечно малого цилиндрического кольца высотой Δh на основание F_2;

$\bar{\varphi}_{D,2}$ — коэффициент облученности между делителем F_D и основанием F_2;

$\bar{\varphi}_{4,2}$ — коэффициент облученности между основаниями F_4 и F_2.

Значения $\bar{\varphi}_{D,2}$ и $\bar{\varphi}_{4,2}$ определяем по (11), тогда коэффициент облученности в приращениях можно записать так:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \{[x - \sqrt{1+x^2}] - [(x + \Delta x) - \sqrt{1 + (x + \Delta x)^2}\} \frac{1}{4\,\Delta x}, \qquad (13)$$

где

$$x = \frac{h}{D} \text{ — безразмерная высота,}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta h}{D} \text{ — приращение безразмерной высоты.}$$

При $\Delta x \to 0$ $\bar{\varphi}_{1,2}$ запишется следующим образом:

$$\varphi_{1,2} = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi_{1,2} = \frac{1}{4} \lim \left[\frac{\varphi(x) - \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right], \qquad (14)$$

где

$$\varphi(x) = [x - \sqrt{1+x^2}]^2,$$

$$\varphi(x + \Delta x) = [(x + \Delta x) - \sqrt{1 + (x + \Delta x)^2}]^2.$$

В дифференциальной форме:

$$\varphi_{1,2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

или

$$\varphi_{1,2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{d\varphi}{d\left(\frac{H}{D}\right)}. \qquad (15)$$

Окончательно имеем, приняв во внимание (11)

$$\varphi_{1.2}=\frac{\left(\frac{h}{D}\right)^2+0{,}5}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{D}\right)^2}}-\frac{h}{D}. \tag{16}$$

Вывод

Последнее равенство (16) совпадает с равенством (9). Это показывает, что определение коэффициента облученности элементарного цилиндрического кольца на основание цилиндра приближенным интегрированием и методом лучевой алгебры, при использовании общепринятого соотношения (11) приводит к одинаковому результату.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Хоблер. Теплопередача и теплообменники. ГХИ, 1961.
2. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматиздат, 1962.
3. С. Н. Шорин. Теплопередача. Изд-во «Высшая школа», 1964.
4. А. С. Невский. Теплообмен излучением в металлургических печах и топках котлов. Металлургиздат, 1958.