

## К РАСЧЕТУ ПОТЕРЯННОЙ ЭЛЕКТРОНАМИ ЭНЕРГИИ

К. А. ДЕРГОБУЗОВ, О. Б. ЕВДОКИМОВ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

### Бесконечный плоский источник в бесконечной однородной среде

В [1] Спенсером предложен метод расчета потерянной электронами энергии в бесконечной однородной среде. В работах [2, 3] развит метод расчета функции распределения, что позволяет вычислять распределение потерянной энергии

$$D(x) = \int_{4\pi} d\Omega \int_x^1 I(x, s, \Theta) \frac{dT}{ds}(s) ds, \quad (1)$$

где  $I(x, s, \Theta)$  — функция углового и энергетического распределения;  
 $\frac{dT}{ds}$  — удельные ионизационные потери;

$x$  — пространственная координата, выраженная в единицах  $R_0$  полного пробега электронов, полученного в приближении непрерывного замедления;

$s$  — длина пройденного электроном пути в тех же единицах;

$D(x)$  — распределение потерянной энергии.

Достоинство второго метода состоит в том, что он позволяет легко запрограммировать и автоматизировать процесс вычисления распределения потерянной энергии. При этом если необходимо вычислять  $D(x)$ , можно  $I(x, s, \Theta)$  не определять. В самом деле, запишем уравнение для  $I(x, s, \varepsilon)$  [2]:

$$I(x, s_i, \varepsilon_{i+1}) = \int_{4\pi} I(x - \lambda_i \varepsilon_i, s_{i-1}, \varepsilon_i) g(\lambda_i, s_i, \omega_i) d\Omega_i, \quad (2)$$

где  $g(\lambda_i, s_i, \omega_i)$  — угловое распределение электронов на  $(i+1)$ -м отрезке относительно направления движения на  $i$ -м отрезке траектории;

$$s_i = \sum_{n=1}^i \lambda_n;$$

$$\varepsilon = \cos \Theta$$

$\lambda_i$  — длина отрезка траектории.

Умножим уравнение (2) на  $-\frac{dT}{ds}(s_i)$ . Учтем, что  $\frac{dT}{ds}(s_i) = \gamma(s_i, \lambda_i) \frac{dT}{ds}(s_{i-1})$

и, вводя обозначение  $D(x, s_i, \varepsilon_{i+1}) = -\frac{dT}{ds}(s_i) I(x, s_i, \varepsilon_{i+1})$ , получим уравнение для  $D(x, s, \varepsilon)$ :

$$D(x, s_j, \varepsilon_{j+1}) = \int_{4\pi} D(x - \lambda_j \varepsilon_j, s_{j-1}, \varepsilon_j) q(\lambda_j, s_j, \omega_j) d\Omega_j, \quad (3)$$

где

$$q(\lambda_j, s_j, \omega_j) = \gamma(s_j, \lambda_j) g(\lambda_j, s_j, \omega_j). \quad (4)$$

По внешнему виду уравнение (3) совпадает с (2), следовательно, если  $\alpha_{\kappa L}(s)$  и  $\beta_{\kappa L}(s)$  гармонические коэффициенты угловых моментов  $D_L(x, s)$  функции  $D(x, s, \varepsilon)$ , то рекуррентные соотношения для них будут подобны таковым для гармонических коэффициентов угловых моментов функции  $I(x, s, \varepsilon)$  [2]:

$$\alpha_{\kappa L}(s_j) \equiv \alpha_{\kappa L}^j = Q_L^j \sum_{L'} \alpha_{\kappa L'}^{j-1} V_{LL'}^j - \beta_{\kappa L'}^{j-1} W_{LL'}^j, \quad (5)$$

$$\beta_{\kappa L}(s_j) \equiv \beta_{\kappa L}^j = Q_L^j \sum_{L'} \beta_{\kappa L'}^{j-1} V_{LL'}^j + \alpha_{\kappa L'}^{j-1} W_{LL'}^j,$$

где

$$Q_L^j = \gamma(s_i, \lambda_i) G_L^j,$$

а  $V_{LL'}^j$ ,  $W_{LL'}^j$  и  $G_L^j$  определены в [2].

Тогда распределение потерянной энергии

$$D(x) = \sum_{j(x)}^{j_m} \left\{ \frac{a_{00}^j}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{\kappa 0}^j \cos \kappa \pi x + \beta_{\kappa 0}^j \sin \kappa \pi x \right\} \lambda_j, \quad (6)$$

где  $j_m$  и  $j(x)$  определяются из условий:

$$x = \sum_{\kappa=1}^{j(x)} \lambda_{\kappa} \text{ и } 1 = \sum_{\kappa=1}^{j_m} \lambda_{\kappa}. \quad (7)$$

Начальные условия для расчета  $D(x)$  определяются тем, что при  $s=0$

$$D(x, s, \varepsilon) |_{s=0} = -\frac{dT}{ds}(0) \delta(x) \delta(1 - \cos \Theta). \quad (8)$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{\kappa L}(0) = -\frac{dT}{ds}(0),$$

$$\beta_{\kappa L}(0) = 0. \quad (9)$$

Вместо формулы суммирования прямоугольников могут быть применены и другие формулы суммирования. Формула (6) автоматически обеспечит достаточную точность численного интегрирования, так как  $\lambda_j \ll 1$  ( $\lambda_j \sim 0,02$ ).

### Приближенный учет наличия границы

Известно, что теоретический учет конечных размеров среды при расчете задач переноса частиц наталкивается на большие математические трудности. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможности приближенного расчета влияния границы поглотителя.

Суть предлагаемого метода рассмотрим на примере плоскопараллельной бесконечной пластины толщиной  $x_0$ , перпендикулярной оси  $x$ , на передней поверхности которой ( $x = 0$ ) находится плоский источник:

$$Q(x, s, \varepsilon)|_{x=0} = I(x, s, \varepsilon)|_{s=0} = \delta(x) \delta(1 - \varepsilon). \quad (10)$$

Задача состоит в том, чтобы рассчитать  $I_{\parallel}(x, s, \varepsilon)$  в  $0 \leq x \leq x_0$ .

Будем временно считать, что поглотитель бесконечный. На основе [2] может быть рассчитана функция распределения электронов в плоскостях  $x = 0$  и  $x = x_0$ , т. е.  $I(x, s, \varepsilon)|_{x=x_0}$  и  $I(x, s, \varepsilon)|_{x=0}$ . Если считать, что каждый электрон проходит плоскость  $x = x_0$  в направлении, обратном оси  $x$ , не более одного раза, отсутствие вещества в областях  $x > x_0$  может быть учтено введением отрицательного источника электронов

$$Q(x_0, s_j, \varepsilon) = I(x, \varepsilon, s_j)|_{x=x_0} \text{ при } \varepsilon \leq 0, s_j \geq x_0. \quad (11)$$

Аналогично учитывается граница в плоскости  $x = 0$ , если каждый электрон пересекает плоскость  $x = 0$  из области  $x < 0$  не более одного раза:

$$Q(0, s_j, \varepsilon) = I(x, s_j, \varepsilon)|_{x=0} \text{ при } \varepsilon > 0, s_j \neq 0. \quad (12)$$

Тогда функция распределения для плоскопараллельной пластины  $I_{\parallel}(x, s, \varepsilon)$  выразится через функции распределения для бесконечного поглотителя, рассчитанные соответственно для источников (10), (11) и (12)  $I(x, s, \varepsilon)$ ,  $I^-(x, s, \varepsilon)$  и  $I^+(x, s, \varepsilon)$ :

$$I_{\parallel}(x, s, \varepsilon) = I(x, s, \varepsilon) - I^-(x, s, \varepsilon) - I^+(x, s, \varepsilon). \quad (13)$$

Функции  $I^-(x, s, \varepsilon)$  и  $I^+(x, s, \varepsilon)$  рассчитываются подобно  $I(x, s, \varepsilon)$ , но при начальных условиях (11) и (12).

Обозначим через  $I_j^-(x, s, \varepsilon)$  функцию распределения электронов, соответствующую источнику (10) электронов с остаточным пробегом  $s_j$ . Полная функция распределения  $I^-(x, s, \varepsilon)$  будет представлять суперпозицию  $I_j^-(x, s, \varepsilon)$ :

$$I^-(x, s, \varepsilon) = \sum_{j=j(x_0)}^{j_m} I_j^-(x, s, \varepsilon), \quad (14)$$

где  $j_m$  и  $j(x_0)$  определяются (7) при  $x = x_0$ .

Начальное условие для  $I_j^-(x, s, \varepsilon)$  имеет вид (10):

$$I_j^-(x, s, \varepsilon)|_{s=s_j} = \delta(x - x_0) I(x, s_j, \varepsilon) H(\varepsilon), \quad (15)$$

где кусочно-ступенчатая функция

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \varepsilon \leq 0 \\ 0 & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$I(x, s_j, \varepsilon) = \sum_{L'} \frac{2L' + 1}{4\pi} P_{L'}(\varepsilon) \left\{ \frac{a_{0L'}(s_j)}{2} + \sum_{\kappa'=1} a_{\kappa'L'}(s_j) \cos \kappa' \pi x + b_{\kappa'L'}(s_j) \sin \kappa' \pi x \right\},$$

то

$$[I_j^-(x, s_j, \varepsilon)]_L = 2\pi \int_{-1}^1 I_j^-(x, s_j, \varepsilon) P_L(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \delta(x - x_0) \sum_{L'} \frac{2L' + 1}{2} \left\{ \frac{a_{0L'}(s_j)}{2} + \sum_{\kappa'=1} a_{\kappa'L'}(s_j) \cos \kappa' \pi x + \right. \\ \left. + b_{\kappa'L'}(s_j) \sin \kappa' \pi x \right\} \gamma_{LL'}, \quad (16)$$

где

$$\gamma_{LL'} = \int_{-1}^0 P_L(\varepsilon) P_{L'}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2L + 1}, \quad L' = L; \\ = 0, \quad (L - L') - \text{четное}, \quad L \neq L'; \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(3L + 3L' - 1)} L! L!}{2^{L+L'-1} (L - L') (L + L' - 1) \left[ \left(\frac{L}{2}\right)! \left(\frac{L' - 1}{2}\right)! \right]^2}, \\ L - \text{четное}, \quad L' - \text{нечетное}.$$

Тогда

$$[a_j^-(s_j)]_{\kappa L} = \cos \kappa \pi x_0 \sum_{L'} \frac{2L' + 1}{2} \gamma_{LL'} \left\{ \frac{a_{0L'}(s_j)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{\kappa'=1} a_{\kappa'L'}(s_j) \cdot \cos \kappa' \pi x_0 + b_{\kappa'L'}(s_j) \sin \kappa' \pi x_0 \right\}, \quad (17) \\ [b_j^-(s_j)]_{\kappa L} = \sin \kappa \pi x_0 \sum_{L'} \frac{2L' + 1}{2} \gamma_{LL'} \left\{ \frac{a_{0L'}(s_j)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{\kappa'=1} a_{\kappa'L'}(s_j) \cdot \cos \kappa' \pi x_0 + b_{\kappa'L'} \sin \kappa' \pi x_0 \right\}.$$

Далее на основе (17) и рекуррентных соотношений, полученных в [2], можно рассчитать  $[a_j^-(s_j)]_{\kappa L}$  и  $[b_j^-(s_j)]_{\kappa L}$  для всех  $i \geq j$  и, следовательно, определить  $I^-(x, s, \varepsilon)$  и затем по (14) вычислить  $I^-(x, s, \varepsilon)$ . Аналогично рассчитывается и  $I^+(x, s, \varepsilon)$ .

Таким образом, в предположении, что каждый электрон проходит в область  $0 < x < x_0$  из областей  $x < 0$  и  $x > x_0$  не более одного раза, можно рассчитывать функцию распределения, а следовательно, и  $D(x)$  для плоскопараллельной пластины, занимающей пространство от  $x=0$  до  $x=x_0$ .

Для учета границы по предложенному методу в настоящее время разрабатывается программа расчета на электронно-вычислительной машине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. V. Spenser. Phys. Rev., 98, 1597 (1955).
2. А. А. Воробьев, О. Б. Евдокимов, Б. А. Кононов. Модель проникновения быстрых электронов. В сборнике «Дозиметрия больших доз», стр. 212. Издательство АН Уз. ССР, Ташкент, 1966.
3. А. А. Воробьев, О. Б. Евдокимов, Б. А. Кононов. К исследованию переноса быстрых электронов, Известия Томского политехнического института, т. 143, стр. 70. Издательство Томского университета, 1966.