ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 184 1970

ШЕСТИПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО КОНИК в P_3

В. И. МАТВЕЕНКО

(Представлена кафедрой высшей математики)

В настоящей статье продолжается исследование шестипараметрических семейств кривых второго порядка (коник) в трехмерном проективном пространстве (см. [4]). Рассматривается семейство $K(3,6)$ — шестипараметрическое семейство невырожденных коник C, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство. Получен основной объект [1]. Найдены и геометрически охарактеризованы относительные и абсолютные инварианты. Построен канонический репер, рассмотрены некоторые подмногообразия семейства $K(3,6)$, некоторые геометрические образы, ассоциированные с семейством $K(3,6)$, и некоторые классы этого семейства. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] — [5]. Индексы принимают следующие значения: $i, j, k, g, t = 1, 2$; $i \neq j$; $k \neq t$; $m, n, r = 1, 2, 3$; $m \neq n$; $m \neq r$; $n \neq r$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\sigma = i + 3$; $\varkappa = j + 3$. По i, j, g, r, α не суммировать!

Поместим вершины A_1 и A_2 подвижного репера $\{A_\alpha\}$ в различные точки коники C, вершину A_3 — в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где ω_α^β — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]. \tag{2}$$

Уравнения коники C относительно этого репера имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \ x^4 = 0, \ p \neq 0. \tag{3}$$

Произведем частичную нормировку вершин репера $\{A_\alpha\}$, положив $p = 1$. Формы

$$\omega_n^4, \ \omega_i^j, \ \omega_3^j - \omega_i^3, \quad \omega_k^k - 2\omega_3^3$$

являются главными формами. Выберем из них за базисные

$$\omega_n = \omega_n^4, \quad \omega_\sigma = \omega_i^j, \quad \omega_6 = \omega_k^k - 2\omega_3^3.$$

Остальные главные формы выразятся через них в виде:

$$\omega_3^j - \omega_i^3 = C_i^\lambda \omega_\lambda. \tag{4}$$

Из этих уравнений обычным путем [1] получается следующая система дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта $C_1 \{C_i^\lambda\}$:

$$
\begin{gathered}
\delta C_i^g = C_i^g(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_g^g - \pi_j^j) + C_i^{g+3}\pi_4^{3-g} - \\
- C_i^3\pi_3^g + C_i^6\pi_4^g - C_i^{k+3}C_k^g\pi_k^3 - 3C_i^6 \sum_k C_t^g \pi_k^3 + \\
+ \delta_i^g\pi_4^3, \quad \delta C_i^3 = C_i^3(\pi_4^4 - \pi_j^j) + 2C_i^6\pi_4^3 - \pi_4^j - \\
- \sum_k (C_i^k + C_i^{k+3}C_k^3)\pi_k^3 - 3C_i^6 \sum_k C_t^3\pi_k^3, \\
\delta C_i^{g+3} = C_i^{g+3}[\pi_3^3 - \pi_i^i + 2\delta_j^g(\pi_i^i - 2\pi_j^j)] - \\
- \sum_k C_i^{k+3}C_k^{g+3}\pi_k^3 - 3C_i^6 \sum_k C_t^{g+3}\pi_k^3 + \delta_i^g(\pi_3^i + \pi_j^3), \\
\delta C_i^6 = C_i^6(\pi_3^3 - \pi_j^j) - \sum_k C_k^6 C_i^{k+3}\pi_k^3 + \pi_i^3 - 3C_i^6 \sum_k C_t^6\pi_k.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Так как эта система уравнений алгебраически разрешима относительно всех независимых вторичных форм $\overline{\pi}_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\beta - \delta_\alpha^3\pi_4^4$, то объект C_1 является основным [1]. Система уравнений (5) дает возможность произвести следующую фиксацию репера:

$$C_1^6 = C_2^6 = 0. \tag{6}$$

Формы ω_i^3 и ω_3^i становятся главными и можно записать их разложение по базисным формам в виде

$$\omega_i^3 = C_i^{3\lambda}\omega_\lambda, \qquad \omega_3^i = C_3^{i\lambda}\omega_\lambda. \tag{7}$$

Выясним геометрический смысл фиксации (6). Голономный комплекс коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники неподвижна. Среди подмногообразий Ψ_1 [5] коник

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \ \omega_4 : \omega_5 : \omega_6 = b_1 : b_2 : b_3, \tag{8}$$

принадлежащих этому комплексу, существует в общем случае сорок восемь таких подмногообразий Ψ_1 коник, для каждого из которых коника C имеет две двухкратные характеристические точки M_u^i $(u = 1, 2, 3, \dots, 48)$. Это предложение вытекает из рассмотрения системы уравнений

$$
\begin{gathered}
(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^n\omega_n = 0, \\
x^1x^2\omega_6 + \sum_k [(x^k)^2\omega_{k+3} + x^kx^3(C_3^{i\lambda} - C_k^{3\lambda})\omega_\lambda] = 0
\end{gathered}
\tag{9}
$$

для определения точек пересечения исходной и смежной коник семейства $K(3,6)$. При фиксации (6) вершины A_i репера $\{A_\alpha\}$ помещаются в точки M_1^i. Подмногообразие Ψ_1^3 коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники неподвижна, а точки A_i являются двухкратными характеристическими точками коники C. Обозначим через C_i^* конику, проходящую через точку A_3 и характеристические точки коники C, соответствующие подмногообразию Ψ_1^i коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_x = \omega_6 = 0$. Подмногообразие Ψ_1^i коник геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники неподвижна, точки A_1

и A_2 полярно сопряжены относительно дополнительной коники C_i^*, а точка A_j является точкой, огибающей семейства прямых (A_jA_3). Используя систему уравнений (9), получаем уравнения коники C_i^*

$$(x^i)^2 + C_k^\sigma x^k x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{10}$$

Из этих уравнений следует, что коника C_i^* проходит через точку A_j и, кроме точки A_3, пересекает прямую A_iA_3 еще в точке $D_i = C_i^\sigma A_i - A_3$. Выбором базисных форм ω_λ исключаются случаи, когда размерность многообразия плоскостей коник меньше трех, когда характеристические точки коники C подмногообразия Ψ_1^3 становятся неопределенными и случаи прохождения коник C_i^* через точки A_i.

Из системы уравнений (7) обычным путем получается следующая система дифференциальных уравнений внутреннего продолженного фундаментального объекта $C_2\{C_1, C_i^{3\lambda}, C_3^{i\lambda}\}$ [1]:

$$\begin{gathered}
\delta C_i^{3g} = C_i^{3g}(\pi_4^4 - \pi_3^3 + \pi_i^i - \pi_g^g) + C_i^{3,g+3}\pi_4^{3-g} + C_i^{36}\pi_4^g - \delta_i^g \pi_4^3, \\
\delta C_i^{33} = C_i^{33}(\pi_i^i - 2\pi_3^3 + \pi_4^4) + 2C_i^{36}\pi_4^3, \\
\delta C_3^{ig} = C_3^{ig}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_i^i - \pi_g^g) + C_3^{i,g+3}\pi_4^{3-g} + C_3^{i6}\pi_4^j, \\
\delta C_3^{i3} = C_3^{i3}(\pi_4^4 - \pi_i^i) + 2C_3^{i6}\pi_4^3 - \pi_4^i, \\
\delta C_3^{i,g+3} = C_3^{i,g+3}(\pi_3^3 - 2\pi_g^g + \pi_j^j), \qquad \delta C_3^{i6} = C_3^{i6}(\pi_3^3 - \pi_i^i). \\
\delta C_i^{3,g+3} = C_i^{3,g+3}(2\pi_{3-g}^{3-g} - \pi_j^j - \pi_3^3), \qquad \delta C_i^{36} = C_i^{36}(\pi_i^i - \pi_3^3).
\end{gathered} \tag{11}$$

Из систем уравнений (5) и (11) непосредственно замечаем, что величины $C_k^\sigma, C_3^{i,n+3}, C_i^{36}, C_k^{3\sigma}$ являются относительными инвариантами. Условие $C_i^\sigma = 0$ характеризует семейство коник, для которого точки A_i и A_3 полярно сопряжены относительно коники C_i^*. Условие $C_j^\sigma = 0$ характеризует семейство коник, для которого точка A_j является двухкратной характеристической точкой коники C подмногообразия Ψ_1^i. Условие $C_3^{i,n+3} = 0$ характеризует семейство коник, для которого касательная l_3^{n+3} к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_{m+3}=\omega_{r+3}=0}$ совпадает с прямой A_3A_j. Условие $C_i^{36} = 0$ $[C_i^{3\varkappa} = 0]$ характеризует семейство коник, для которого точка A_i неподвижна для подмногообразия Ψ_1^3 $[\Psi_1^j]$. Условие $C_i^{3\sigma} = 0$ характеризует семейство коник, для которого касательная l_i^σ к линии $(A_i)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_6=0}$ совпадает с прямой A_1A_2.

Величины

$$A = \frac{C_1^{36}C_2^4}{C_2^{36}C_1^1}, \quad B_i = C_j^\varkappa C_3^{j\sigma}, \quad E_i = \frac{C_3^{i\varkappa}}{C_j^{3\varkappa}},$$

$$H_i = C_j^{3\varkappa}C_i^\sigma, \quad G_i = \frac{C_1^\sigma C_3^{1\sigma}}{C_2^\sigma C_3^{2\sigma}}$$

являются абсолютными инвариантами. Геометрически они характеризуются через сложные отношения четверок точек следующим образом:

$$\begin{gathered}
A = (A_1A_2;\ M_{12}^6 S_{13}), \quad B_i = (A_iA_3;\ S_jM_{i3}^\sigma), \\
E_i = 1 - (A_iA_3;\ S_jQ_j), \ H_i = -2(A_iA_3;\ Q_jS^i) \\
G_i = -(A_1A_2;\ S_{i3}Q_{3i}),
\end{gathered} \tag{12}$$

где S_{i3} — точка пересечения прямой A_1A_2 с полярой точки A_3 относительно коники $\overset{*}{C_i}$, S_i — точка пересечения прямой A_jA_3 с полярой точки D_i относительно коники C, $M_{12}^6\,[M_{i3}^\sigma]$ — точка огибающей семейства прямых $(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=0}\,[(A_iA_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=0}]$, $Q_{3m}[Q_i]$ — точка пересечения прямой A_1A_2 $[A_jA_3]$ с касательной к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_{n+3}=\omega_{r+3}=0}$ $[(A_l)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=0}]$, S^i — точка пересечения прямой A_iA_3 с полярой точки A_i относительно коники $\overset{*}{C_i}$.

Используя выражения (12), получаем следующие равенства:

$$(A_1A_2;\ M_{12}^6Q_{33}) = -1, \quad (A_iA_3;\ S^iD_i) = 2,$$

$$(A_1A_3;\ S_2M_{13}^4) - (A_1A_3;\ Q_2D_1) = (A_2A_3;\ S_1M_{23}^5) - (A_2A_3;\ Q_1D_2).$$

Исключая из рассмотрения случаи обращения в нуль относительных инвариантов C_i^{36}, осуществим следующую фиксацию репера:

$$C_j^{36}C_i^{3i} - C_i^{36}C_j^{3i} = C_3^{16}C_3^{23} - C_3^{26}C_3^{13} = 0, \quad C_3^{ij}C_i^{36} - C_3^{i6}C_i^{3j} = 1,$$
$$C_i^{36} \neq 0, \ \sum_k C_k^{36}C_3^{t6}\,(C_t^{36}C_k^{3,k+3} - C_k^{36}C_t^{3,k+3}) \neq 0. \tag{13}$$

Учитывая еще условие эквипроективности $(A_1A_2A_3A_4) = 1$, получаем, что все вторичные параметры зафиксированы и репер $\{A_\alpha\}$ становится каноническим. Выясним геометрический смысл фиксации (13). Обозначим через

$$a_i = \{A_i,\ C_j^{36}A_j + (C_j^{36}C_i^{3\sigma} - C_i^{36}C_j^{3\sigma})\,A_3,$$
$$(C_j^{36}C_i^{3i} - C_i^{36}C_j^{3i})\,A_3 + C_j^{36}A_4\} \tag{14}$$

касательную плоскость к неголономной поверхности $(A_i)_{\omega_j=\omega_3=\omega_\chi=\overset{3}{\omega_j}=0}$, а через

$$a_3 = \{A_3,\ C_3^{k6}A_k,\ C_3^{k3}A_k + A_4\} \tag{15}$$

касательную плоскость к неголономной поверхности $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=0}$. Неголономное подмногообразие Ψ_2 [5] коник $\omega_j = \omega_3 = \omega_\chi = \overset{3}{\omega_j} = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_j неподвижна, а прямая A_jA_3 является характеристикой плоскости коники. Неголономное подмногообразие Ψ_2 коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = \omega_5 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_i являются характеристическими точками прямых A_iA_3.

Характеристическим элементом плоскости [прямой линии] F подмногообразия $\Psi_{\lambda-1}$ [5] плоскостей [прямых линий] (F) называется такая прямая линия [точка] f, первая дифференциальная окрестность которой для всех подмногообразий Ψ_1, принадлежащих подмногообразию $\Psi_{\lambda-1}$, не выходит из плоскости [прямой линии] F.

Из выражений (14) и (15) следует, что при фиксации (13) вершина A_4 репера $\{A_\alpha\}$ помещается в точку пересечения плоскостей a_r. При этом исключается случай принадлежности всех плоскостей a_r одному пучку плоскостей. При фиксации

$$C_3^{ij}C_i^{36} - C_3^{i6}C_i^{3j} = 1$$

исключается случай прохождения касательной к линии

$$(A_3)_{\omega_i=\omega_3=\omega_4=\omega_5=\overset{3}{\omega_i}=0}$$

через точку A_i. Неголономное подмногообразие Ψ_5 коник $\omega_\alpha^\rho = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_α является характеристической точкой плоскости $A_\alpha A_\tau A_\mu$ ($\alpha, \rho, \tau, \mu = 1, 2, 3, 4$; $\alpha \neq \rho, \tau, \mu$; $\rho \neq \tau, \mu$; $\tau \neq \mu$).

Деривационные формулы построенного канонического репера имеют вид:

$$dA_i = C_i^{i\lambda}\omega_\lambda A_i + \omega_\sigma A_j + C_i^{3\lambda}\omega_\lambda A_3 + \omega_i A_4,$$
$$dA_3 = C_3^{n\lambda}\omega_\lambda A_n + \omega_3 A_4, \quad dA_4 = C_4^{\beta\lambda}\omega_\lambda A_\beta, \tag{16}$$

где

$$C_\beta^{\beta\lambda} = 0, \quad C_k^{k\lambda} - 2C_3^{3\lambda} = \delta_6^\lambda.$$

Уравнения структуры (2) приводят к системе внешних квадратичных дифференциальных уравнений, совместность которой непосредственно следует из теоремы (2) работы [6]. Решение этой системы зависит от двух функций шести аргументов, что соответствует тому геометрическому факту, что семейство коник $K(3, 6)$ существует с произволом двух функций шести аргументов.

Из систем уравнений (9), (10) и формул (16) вытекают следующие предложения:

1) Неголономная конгруэнция (подмногообразие Ψ_2) коник $\omega_i = \omega_3 = \omega_\sigma = \omega_6 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для нее фокусы коники C совпадают с точками ее пересечения с коникой C_j^*. Для этой конгруэнции точка A_i является трехкратным фокусом коники C и характеристической точкой прямой A_iA_3. Остальным фокусам коники C соответствует строенное фокальное семейство $\omega_j = 0$. Причём, фокальные линии $\omega_j = 0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C.

2) Неголономная конгруэнция коник $\omega_i = \omega_3 = \omega_\varkappa = \omega_6 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для нее фокусами коники C являются точки ее пересечения с коникой C_i^* и точка A_i. Причем, точка A_i является двухкратным фокусом, которому соответствует фокальное семейство $\omega_\sigma = 0$. Остальным фокусам соответствует счетверенное фокальное семейство $\omega_j = 0$. Причем, фокальные линии $\omega_j = 0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C.

3) Для неголономной конгруэнции коник $\omega_i = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$ фокусы коники C совпадают с точками A_k. Причем, точка A_i является четырехкратным фокусом, а точка A_j—двухкратным фокусом, которому соответствует фокальное семейство $\omega_j = 0$. Касательная плоскость к фокальной поверхности (A_j) совпадает с плоскостью $A_jA_3A_4$, а фокальные линии $\omega_j = 0$ на поверхности (A_j) являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C. Для этой конгруэнции коник точка A_i является характеристической точкой прямой A_iA_3.

4) Для неголономной конгруэнции коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = \omega_5 = 0$ точки A_i являются трехкратными фокусами коники C и характеристическими точками прямых A_iA_3.

5) На неголономной поверхности $(A_3)_{\omega_j=\omega_3=\omega_4=\omega_5=0}$ асимптотические линии совпадают с линиями $\omega_i\omega_3 = 0$. Причем, касательная к линии $\omega_3^i = 0$ совпадает с прямой A_3A_j.

6) Для неголономной конгруэнции прямых $(A_iA_3)_{\omega j=\omega_3=\omega_4=\omega_5=0}$ фокусы луча совпадают с точками A_i и A_3, а торсами являются линейчатые поверхности $\omega_i\omega_3^j = 0$. Причем, торсы $\omega_i = 0$ вырождаются в плоскости коник C, а касательные плоскости к фокальным поверхностям (A_i) совпадают с плоскостями $A_iA_3A_4$.

7) Для неголономной конгруэнции прямых $(A_iA_3)_{\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_6=0}$ один из фокусов луча совпадает с точкой A_3, а линейчатые поверхности $\omega_i\omega_3^j=0$ являются торсами. Причем, торсы $\omega_i=0$ вырождаются в плоскости коник C.

8) Для неголономной конгруэнции прямых $(A_iA_3)_{\omega_j=\omega_3=\omega_\sigma=\omega_6=0}$ фокусы луча совпадают с точками A_i и A_3, а торсы — с линейчатыми поверхностями $\omega_i\omega_3^j=0$. Причем, торсы $\omega_i=0$ вырождаются в плоскости коник C.

9) Для неголономной конгруэнции прямых $(A_iA_4)_{\omega_i=\omega_u=\omega_\sigma=\omega_z=0}$ $(u=j, 3;\ z=\varkappa, 6)$ один из фокусов луча совпадает с точкой A_i, а торсами являются линейчатые поверхности $\omega_i^3\omega_4^j=0$. Причем, торсы $\omega_i^3=0$ вырождаются в конусы с вершинами в A_i. Для этой конгруэнции точка A_i является характеристической точкой прямой A_iA_3.

Рассмотрим два класса семейств $K(3,6)$. Семейства коник $K_i(3,6)$, характеризуемые натуральными уравнениями $C_3^{i6}=0$, существуют и определяются с произволом одной функции шести аргументов. Они имеют следующие характеристические свойства: линия $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=0}$ является прямой линией, совпадающей с прямой A_3A_j; линия $(A_j)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=0}$ вырождается в точку; конгруэнция коник $\omega_2=\omega_3=\omega_5=\omega_2^3=0$ является голономной конгруэнцией; неголономная конгруэнция прямых $(A_jA_3)_{\omega_i=\omega_3=\omega_4=\omega_5=0}$ вырождается в линейчатую поверхность, касательные плоскости к которой в точках A_j и A_3 совпадают с плоскостями $A_jA_3A_4$ и $A_1A_2A_3$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТЛ, М.-Л., 1948.
3. В. С. Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 43—53.
4. В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия шестипараметрического семейства невырожденных коник, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство. Третья Прибалтийская геометрическая конференция. Тезисы докладов. Паланга, 1968, 114—115.
5. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометрический сборник, вып. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194
6. В. В. Васенин, Р. Н. Щербаков. О системах внешних квадратичных. дифференциальных уравнений. Сибирский матем. журнал.