ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 184 1970

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕМЕЙСТВА K (2,6)

В. И. МАТВЕЕНКО

(Представлена кафедрой высшей математики)

В данной статье продолжается исследование многопараметрических семейств кривых второго порядка (коник) в трехмерном проективном пространстве ([3] — [4]). Рассматривается семейство $K(2,6)$ — шестипараметрическое семейство невырожденных коник C, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство. Это семейство коник существует с произволом одной функции шести аргументов. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] — [5].

Поместим вершину A_3 подвижного репера $\{A_\alpha\}$ в характеристическую точку M плоскости коники (при этом исключается случай прохождения коники через точку M), вершины A_i — в точки коники, полярно сопряженные относительно нее с точкой A_3, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $i, j, g, k, t = 1, 2$; $i \neq j$; $k \neq t$; $m, n, r = 1, 2, 3$; $m \neq n$; $n \neq r$; $m \neq r$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\sigma = i + 2$; $\varkappa = j + 2$; $\xi = i + 4$; $\eta = j + 4$; по i, j, g, r, α не суммировать! Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где ω_α^β — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]. \tag{2}$$

Уравнения коники C относительно этого репера имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \quad p \neq 0. \tag{3}$$

Формы

$$\omega_m^4, \ \omega_i^j, \ \omega_3^i, \ \omega_i^3, \quad \omega_k^k - 2\omega_3^3 - d \ln p$$

являются главными формами. Выберем за базисные формы

$$\omega_i = \omega_i^4, \ \omega_\sigma = \omega_i^j, \ \omega_\xi = \omega_3^j - \frac{1}{p}\omega_i^3.$$

Остальные главные формы выразятся через них в виде:

$$\begin{aligned} &\omega_3^4 = 0, \quad \omega_3^i = C_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_i^3 = p\,(C_3^{jk}\omega_k - \omega_\xi), \\ &\omega_k^k - 2\omega_3^3 - d \ln p = C^\lambda \omega_\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

где $C_3^{12} = C_3^{21}$. Обозначим через D_β^α характеристические точки коники C подмногообразия Ψ_1^α коник [5]. Подмногообразие Ψ_1^i $[\Psi_1^\sigma]$ коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_\varkappa = \omega_5 = \omega_6 = 0$ $[\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_\eta = 0]$ геометрически характеризуется тем, что для него прямая A_1A_2 $[A_iA_3]$ и точка A_j неподвижны. Выбором базисных форм ω_λ исключаются случаи, когда размерность многообразия плоскостей коник меньше двух и случаи неподвижности точек $A_i^\dagger$ для подмногообразий Ψ_1^i и Ψ_1^σ коник.

Из системы уравнений (4) обычным путем [1] получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта $C_1\{C_3^{ik},\ C^\lambda,\ p\}$:

$$\begin{gathered}\delta C_3^{ig} = C_3^{ig}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_i^i - \pi_g^g), \quad \delta\ln p = \pi_k^k - 2\pi_3^3,\\ \delta C^i = C^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) - \pi_4^i + C^\sigma\pi_4^j - \frac{C^\xi}{p}\pi_4^3, \\ \delta C^\sigma = C^\sigma(\pi_j^j - \pi_i^i), \quad \delta C^\xi = C^\xi(\pi_j^j - \pi_3^3).\end{gathered} \tag{5}$$

Из этих уравнений непосредственно заключаем, что величины p, C_3^{ik}, C^σ, C^ξ являются относительными инвариантами. Условие $C_3^{ij} = 0$ характеризует семейство коник, для которого сеть линий $\omega_1\omega_2 = 0$ на поверхности (A_3) является сопряженной. Неголономное Ψ_5 [5] подмногообразие коник $\omega_j = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него прямая A_jA_3 является характеристикой плоскости коники. Характеристическим элементом плоскости [прямой линии] l подмногообразия $\Psi_{\lambda-1}$ плоскостей [прямых линий] называется такая прямая линия [точка], смещение которой для всех подмногообразий Ψ_1, принадлежащих подмногообразию $\Psi_{\lambda-1}$ не выходит из плоскости [прямой линии] l. Условие $C_3^{ii} = 0$ характеризует семейство коник, для которого линия $\omega_j = 0$ на поверхности (A_3) является асимптотической линией. Для этого семейства коник касательная к линии $\omega_j = 0$ на поверхности (A_3) совпадает с прямой A_3A_j. Условие $C^\sigma = 0$ $[C^\xi = 0]$ характеризует семейство коник, для которого точка A_j является четырехкратной [трехкратной] характеристической точкой коники C для подмногообразия Ψ_1^i $[\Psi_1^\sigma]$ коник. Приведенные здесь геометрические характеристики относительных инвариантов вытекают из формул (1) и системы уравнений

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ x^k\omega_k = 0,\\ \omega_3(x^1)^2 + \omega_4(x^2)^2 + C^\lambda\omega_\lambda x^1x^2 + \omega_5x^1x^3 + \omega_6x^2x^3 = 0\end{gathered} \tag{6}$$

для определения точек пересечения исходной и смежной коник семейства $K(2,6)$.

Величины

$$A = \frac{C_3^{11}C_3^{22}}{(C_3^{12})^2},\quad B_i = \frac{pC_3^{jj}}{C_3^{12}(C^\eta)^2},\quad H_i = \frac{C_3^{12}}{C^\sigma C_3^{jj}}$$

являются абсолютными инвариантами. Геометрически они характеризуются через сложные отношения четверок точек следующим образом:

$$\begin{gathered}A = (A_1A_2;\ S_3^2S_3^1),\quad B_i = \frac{1}{2}(A_iA_3;\quad S_j^jP_i^\eta)^2,\\ H_i = -(A_iA_j;\ P^iS_3^j),\end{gathered} \tag{7}$$

где S_r^i — проекция из точки A_r на прямую $A_m A_n$ точки пересечения касательной к линии $(A_3)_{\omega_j=0}$ с коникой C, P^i — точка пересечения прямой A_1A_2 с прямой $D_3^i D_4^i$, P_j^σ — точка пересечения прямых A_jA_3 и $A_iD_4^\sigma$, P_i^σ — точка, расположенная на прямой A_iA_3 и полярно сопряженная точке P_j^σ относительно коники C. Используя выражения (7), получаем следующие равенства:

$$(A_1A_3;\ P_1^4P_1^3) = (A_2A_3;\ P_2^3P_2^4),$$

$$(A_1A_2;\ S_3^2S_3^1) = (A_iA_3;\ S_j^jS_j^i).$$

Исключая из рассмотрения случаи обращения в нуль относительных инвариантов C_3^{12}, C^5, осуществим следующую фиксацию репера:

$$p = C_3^{12} = C^5 = 1. \qquad (8)$$

Если учесть еще условие эквипроективности $(A_1A_2A_3A_4) = 1$, то получим $\pi_\alpha^\alpha = 0$. Формы ω_α^α становятся главными и можно записать их разложение по базисным формам в виде

$$\omega_\alpha^\alpha = C_\alpha^{\alpha\lambda}\omega_\lambda, \qquad (9)$$

где $C_\beta^{\beta\lambda} = 0$.

Из системы уравнений (9) обычным путем получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего продолженного фундаментального объекта $C_2\{C_1, C_r^{r\lambda}\}$ [1]:

$$\begin{aligned} \delta C_i^{ii} &= C_i^{i\sigma}\pi_4^j - C_i^{i\xi}\pi_4^3 - \pi_4^i, \quad \delta C_r^{r,\alpha+2} = 0, \\ \delta C_i^{ij} &= C_i^{i\varkappa}\pi_4^i - C_i^{i\eta}\pi_4^3, \quad \delta C_3^{3i} = C_3^{3\sigma}\pi_4^j - C_3^{3\xi}\pi_4^3. \end{aligned} \qquad (10)$$

Так как системы уравнений (5) и (10) алгебраически разрешимы относительно всех линейно независимых форм $\bar{\pi}_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta\pi_4^4$, то объект C_2 является основным [1].

Системы уравнений (5) и (10) дают возможность осуществить следующую фиксацию репера:

$$S^1 = S^2 = 1,\ C_1^1 + C_1^5 + C_3^{11}(C_1^6 - 1) + C_1^3 + S^3(C_1^5 - 1) = 0,\ \ C_i^\eta \neq 0, \qquad (11)$$

где

$$C_i^\lambda = C_i^{i\lambda} - C_3^{3\lambda}, \quad S^i = \frac{1 - C_j^i - C_3^{ii}C_j^\eta}{C_j^\xi}, \quad S^\sigma = -\frac{C_j^\sigma}{C_j^\xi}.$$

При этой фиксации все вторичные параметры фиксируются и репер становится каноническим. Выясним геометрический смысл фиксации (11). Неголономное подмногообразие Ψ_2 коник

$$\omega_i = \omega_\sigma = \omega_\xi - C_3^{jj}\omega_j = \omega_\eta - S^j\omega_j - S^\varkappa\omega_\varkappa = 0 \qquad (12)$$

геометрически характеризуется тем, что для него точка A_i неподвижна, а точка P_i^3 является характеристической точкой прямой $P_i^3A_j$. Точки A_j и P_j^3 для этого подмногообразия описывают неголономные поверхности, касательные плоскости к которым обозначим через a_j и b_j. При фиксации (11) вершина A_4 репера $\{A_\alpha\}$ помещается в точку пересечения плоскостей a_1, a_2 и b_1. Неравенство $C_i^\eta \neq 0$ исключает случай неподвижности точки P_i^3 для подмногообразия (12).

Деривационные формулы построенного канонического репера имеют вид:

$$\begin{gathered} dA_i = C_i^{i\lambda}\omega_\lambda A_i + \omega_\sigma A_j + (\omega_i + C_3^{jj}\omega_j - \omega_\xi) A_3 + \omega_i A_4, \\ dA_3 = (C_3^{kk}\omega_k + \omega_t) A_k + C_3^{3\lambda}\omega_\lambda A_3, \quad dA_4 = C_4^{\beta\lambda}\omega_\lambda A_\beta. \end{gathered} \tag{13}$$

Уравнения структуры (2) приводят к следующей системе конечных соотношений:

$$2C_k^{k\sigma} + C_3^{ii} = C_k^{\lambda\xi} = 0. \tag{14}$$

Неголономное подмногообразие Ψ_5 коник $\Psi_\alpha^\rho = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_α является характеристической точкой плоскости $A_\alpha A_\tau A_\mu$ $(\alpha, \rho, \tau, \mu) = 1, 2, 3, 4$; $\alpha \neq \rho, \tau, \mu$; $\rho \neq \tau, \mu$; $\tau \neq \mu$. Неголономное подмногообразие Ψ_5 коник $\omega_\xi = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_i и A_3 полярно сопряжены относительно проекции смежной коники из точки A_4 на плоскость исходной коники C.

Из системы уравнений (6) и формул (13) вытекают следующие предложения:

1. Точки A_i являются двухкратными фокусами коники C неголономной конгруэнции коник $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0$ и этим фокусам соответствуют фокальные семейства $\omega_i = 0$. Остальные два фокуса коники C этой конгруэнции лежат на прямой, проходящей через точку A_3, и им соответствует сдвоенное фокальное семейство $C^k\omega_k = 0$.

2. Для неголономной конгруэнции коник $\omega_j = \omega_\varkappa = \omega_5 = \omega_6 = 0$ $[\omega_j = \omega_3 = \omega_4 = \omega_\eta = 0]$ фокусы коники C совпадают с точками $D_\beta^i [D_\beta^\sigma]$. Причем, фокус A_j является четырехкратным фокусом и ему соответствует неопределенное фокальное семейство. Остальным двум фокусам коники C этой конгруэнции соответствует сдвоенное фокальное семейство $\omega_i = 0$. Причем, фокальные линии $\omega_i = 0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C.

3. Для неголономной конгруэнции коник $\omega_j = \omega_\sigma = \omega_5 = \omega_6 = 0$ фокусами коники C являются точки D_β^j и точка A_j. Причем, точки A_k являются двухкратными фокусами. Фокусу A_j соответствует фокальное семейство $\omega_\varkappa = 0$, а остальным фокусам — фокальное семейство $\omega_i = 0$. Причем, фокальные линии $\omega_i = 0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C.

4. Для неголономной конгруэнции коник $\omega_j = \omega_3 = \omega_4 = \omega_\xi = 0$ фокусы коники C совпадают с точками $D_\beta^\varkappa$. Причем, точка A_j является трехкратным фокусом, а точка A_i — двухкратным фокусом. Фокусу A_j соответствует неопределенное фокальное семейство, а остальным фокусам — фокальное семейство $\omega_i = 0$. Причем, фокальные линии $\omega_i = 0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C.

5. Фокусы луча неголономной конгруэнции прямых $(A_1A_2)_{\omega_3=\omega_4=\omega_5=\omega_6=0}$ гармонически делят точки A_1 и A_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТЛ, М.-Л., 1948.
3. В. С. Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 43—53.
4. В. И. Матвеенко. Многопараметрические семейства кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. XXV научно-педагогическая конференция математических кафедр педвузов Уральской зоны. Тезисы докладов и сообщений, Свердловск, 1967, 59—60.
5. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометрический сборник, вып. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194.