ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 187 1974

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории)

В настоящее время все большее значение приобретают вопросы обработки и наглядного представления графической информации, перерабатываемой с помощью вычислительных машин. При этом определенные трудности вызывает регистрация трехмерной информации на двумерной поверхности документа регистрации (бумажной ленте, экране электронно-лучевой трубки и т. д.). Некоторые способы решения указанной задачи можно найти в работах [1, 2].

Одним из возможных вариантов графической регистрации трехмерной информации на плоском носителе является построение проекционных изображений пространственных линий, поверхностей и тел на плоскости проекций. Особенно удобным оказывается применение проекционных методов для вывода информации из аналоговых вычислительных машин при решении трехмерных задач, поскольку в этом случае решение может быть получено в виде трех непрерывных функций времени $(x(t), y(t), z(t))$, описывающих движение некоторой точки A с координатами (x, y, z) в трехмерном пространстве [3]. При такой форме вывода информации возможна непосредственная графическая регистрация с помощью самопишущих приборов и электронно-лучевых индикаторов. В свою очередь, движение точки A с координатами (x, y, z) можно считать, с геометрической точки зрения, движением по поверхности $z(x, y)$. Для регистраций рельефа этой поверхности с сохранением наглядности на плоском носителе можно воспользоваться проекционными методами.

Применению указанных методов для целей графической регистрации трехмерной информации посвящены, в частности, работы [4, 5], где основное внимание уделяется вопросам построения так называемых свободных проекционных изображений [6]. При свободном изображении важна наглядность плоского изображения данного тела и совершенно неважно положение оригинала в пространстве. В соответствии с этим параметры, характеризующие аппарат проектирования, остаются неизвестными.

При выводе геометрической информации из машины и, в частности, при моделировании физических процессов на АВМ возникает необходимость по полученному проекционному изображению функции $z(x, y)$ определить положение оригинала в пространстве. В этом случае необходимо строить так называемые жесткие изображения [6], для которых известны все параметры, характеризующие аппарат проектирования.

При жестком изображении возможно определение положения оригинала в пространстве и метрических соотношений в нем.

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения жестких проекционных изображений для целей вывода геометрической информации из АВМ, представленной в виде функций двух переменных $z(x, y)$.

Проекционное изображение какого-либо тела (поверхности, линии), пространственное положение которого определяется в некоторой системе координат S, на плоскости W получается в результате проектирования этого тела на указанную плоскость.

Наиболее распространенными методами построения изображений являются параллельное и центральное проектирование. Метод проектирования определяет вид соотношений, связывающих координаты неко-

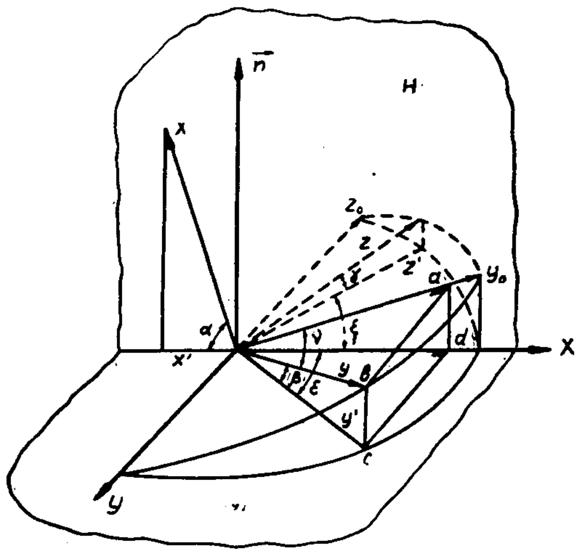

Рис. 1. Геометрические построения к выводу проекционных соотношений

торой точки $A(x, y, z)$ в системе S с координатами (X, Y) проекции этой точки на плоскости W. Для вывода проекционных соотношений необходимо, помимо метода проектирования, задать положение системы S относительно плоскости проекций W. В целом все это определяет аппарат проектирования. Положение системы S сможет считаться фиксированным, если задано положение начала координат и направление осей системы относительно плоскости W.

Для простоты будем считать, что начало координат системы S точка O лежит в плоскости W, направление осей x, y, z зададим соответственно углами α, β, γ (рис. 1). Обозначим через $\vec{n}$ нормаль к плоскости W в точке O. Направление вектора **в системе** S определится углами α', β', γ',
где

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\pi}{2} - \alpha, \\ \beta' &= \frac{\pi}{2} - \beta, \\ \gamma' &= \frac{\pi}{2} - \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Для системы углов (1) справедливо следующее равенство:

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим аналогичное соотношение для углов α, β, γ, характеризующих аппарат проектирования,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1. \qquad (3)$$

Соотношение (3) показывает, что из углов α, β, γ независимыми параметрами являются только два угла, поэтому перейдем в дальнейшем к двум независимым параметрам. В качестве таких параметров удобно выбрать угол наклона какой-либо из осей системы S к плоскости W и угол поворота системы S вокруг этой оси относительно некоторого фиксированного положения. На рис. 1 показано вращение системы S относительно оси x, при этом угол поворота ν определяется как угол между осью y и некоторым фиксированным ее положением y_0. Вектор (ось) y_0 лежит в плоскости H, содержащей ось x и вектор $\vec{n}$. Угол ν определяет также поворот оси z от ее начального положения z_0, находящегося в плоскости проекций W. Исходя из указанных построений, можно выбрать систему координат на плоскости (X, Y). Направление оси X выбираем по линии пересечения плоскостей W и H, соответственно определяется ось Y. Теперь необходимо выразить углы β и γ через параметры α и ν. Соответствующие геометрические построения указаны на рис. 1, откуда нетрудно найти, что

$$\sin\beta = \cos\nu \cdot \cos\alpha. \qquad (4)$$

Аналогично

$$\sin\gamma = \sin\nu \cdot \cos\alpha. \qquad (5)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (4) и (5) удовлетворяют (3), тем самым параметры α и ν полностью определяют вращение системы S в пространстве относительно точки О, при котором ось X не выходит из плоскости H. Отметим, что указанных двух движений (по α и ν) вполне достаточно, чтобы с данного направления, например в направлении нормали, любое выпуклое тело, заданное в системе S, было полностью рассмотрено. Или в другой формулировке: указанных вращений достаточно, чтобы с любого направления была освещена вся поверхность выпуклого тела [7].

В параллельном проектировании выбранных параметров α и ν вполне достаточно для характеристики аппарата проектирования. Метрический параметр l, определяющий расстояние точки O до плоскости по нормали, в этом случае не влияет на форму проекционных соотношений.

Определим положение проекций осей системы S на плоскости W x', y', z' относительно системы (X, Y) углами ε и ζ (рис. 1). Двух углов вполне достаточно, так как x' проектируется всегда на направление оси X.

Используя построения на рис. 1, нетрудно показать, что

$$\sin\varepsilon = \frac{\sin\nu}{\sqrt{1 - \cos^2\nu \cdot \cos^2\alpha}}. \qquad (6)$$

Аналогично

$$\sin\xi = \frac{\cos\nu}{\sqrt{1 - \sin^2\nu \cdot \cos^2\alpha}}. \qquad (7)$$

Используя (6) и (7), для параллельного проектирования можно записать

$$\begin{cases} X=-x\cos\alpha+y\cos\nu\cdot\sin\alpha+z\sin\nu\cdot\sin\alpha \\ Y=y\sin\nu-z\cos\nu. \end{cases} \tag{8}$$

Соотношения (8) определяют координаты проекции точки (x, y, z) из системы S на плоскости W при данных параметрах проектирования α и ν. С другой стороны, зная значения (X, Y) точки (x, y, z) соотношения (8), определяют значения α и ν, а тем самым — положение системы S (соответственно оригинала) в пространстве относительно плоскости проекций W. В результате реализуется жесткое изображение оригинала на плоскости W.

В некоторых случаях бывает желательным получить изображение оригинала с нанесением проекций осей системы S на плоскости W, при этом между проекциями осей углы должны принять определенное значение, т. е. имеет место задача построения изометрии. Одним из распространенных примеров такой задачи является построение ортогональной изометрии, для которой

$$(\widehat{x',y'})=(\widehat{x',z'})=(\widehat{y',z'})=120^\circ.$$

Для этого случая углы в плоскости проекций ε и ζ равны 60°. Используя (6) и (7), можно определить ориентацию системы S в пространстве. Действительно, относительно параметров α и ν имеем систему

$$\frac{\sin\nu}{\sqrt{1-\cos^2\nu\cdot\cos^2\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\nu\cdot\cos^2\alpha}}=\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{9}$$

Решая (9), находим

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и соответственно $\alpha=35^\circ$ и $\nu=45^\circ$. Аналогично могут быть построены и другие аксонометрические системы осей x', y', z'. Применение полученных результатов для построения проекционных графических изображений функций $z(x, y)$ изложено в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Темников. Автоматические регистрирующие приборы. Машгиз. М., 1960.

2. В. И. Рыбак, А. Н. Шишонок. Индикаторное устройство для вывода результатов наблюдений из машины. «Автоматика и приборостроение», № 1, 1963.

3. В. А. Тартаковский. Построение на АВМ линий, лежащих на n-мерных поверхностях. (Настоящий сборник).

4. M. A. Parker. E. P. R. Wallis. The proceeding Instit. of Elect. Eng. vol. 95, part III, № 37, 1948.

5. P. R. Wallis. Journal of Appl. Phys. vol, 18, № 9, Sept. 1947, p. 818—829.

6. Геометрия IV. ЭЭМ. Физматгиз, М., 1963.

7. В. Г. Болтянский. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. «Наука», 1966.

8. И. Э. Наац, В. М. Рейдер. Построение на АВМ проекционных изображений пространственных фигур методом центрального проектирования. (Настоящий сборник).