

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории)

В настоящее время все большее значение приобретают вопросы обработки и наглядного представления графической информации, перерабатываемой с помощью вычислительных машин. При этом определенные трудности вызывает регистрация трехмерной информации на двумерной поверхности документа регистрации (бумажной ленте, экране электронно-лучевой трубки и т. д.). Некоторые способы решения указанной задачи можно найти в работах [1, 2].

Одним из возможных вариантов графической регистрации трехмерной информации на плоском носителе является построение проекционных изображений пространственных линий, поверхностей и тел на плоскости проекций. Особенно удобным оказывается применение проекционных методов для вывода информации из аналоговых вычислительных машин при решении трехмерных задач, поскольку в этом случае решение может быть получено в виде трех непрерывных функций времени $(x(t), y(t), z(t))$, описывающих движение некоторой точки A с координатами (x, y, z) в трехмерном пространстве [3]. При такой форме вывода информации возможна непосредственная графическая регистрация с помощью самопишущих приборов и электронно-лучевых индикаторов. В свою очередь, движение точки A с координатами (x, y, z) можно считать, с геометрической точки зрения, движением по поверхности $z(x, y)$. Для регистраций рельефа этой поверхности с сохранением наглядности на плоском носителе можно воспользоваться проекционными методами.

Применению указанных методов для целей графической регистрации трехмерной информации посвящены, в частности, работы [4, 5], где основное внимание уделяется вопросам построения так называемых свободных проекционных изображений [6]. При свободном изображении важна наглядность плоского изображения данного тела и совершенно неважно положение оригинала в пространстве. В соответствии с этим параметры, характеризующие аппарат проектирования, остаются неизвестными.

При выводе геометрической информации из машины и, в частности, при моделировании физических процессов на АВМ возникает необходимость по полученному проекционному изображению функции $z(x, y)$ определить положение оригинала в пространстве. В этом случае необходимо строить так называемые жесткие изображения [6], для которых известны все параметры, характеризующие аппарат проектирования.

При жестком изображении возможно определение положения оригинала в пространстве и метрических соотношений в нем.

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения жестких проекционных изображений для целей вывода геометрической информации из АВМ, представленной в виде функций двух переменных $z(x, y)$.

Проекционное изображение какого-либо тела (поверхности, линии), пространственное положение которого определяется в некоторой системе координат S , на плоскости W получается в результате проектирования этого тела на указанную плоскость.

Наиболее распространенными методами построения изображений являются параллельное и центральное проектирование. Метод проектирования определяет вид соотношений, связывающих координаты неко-

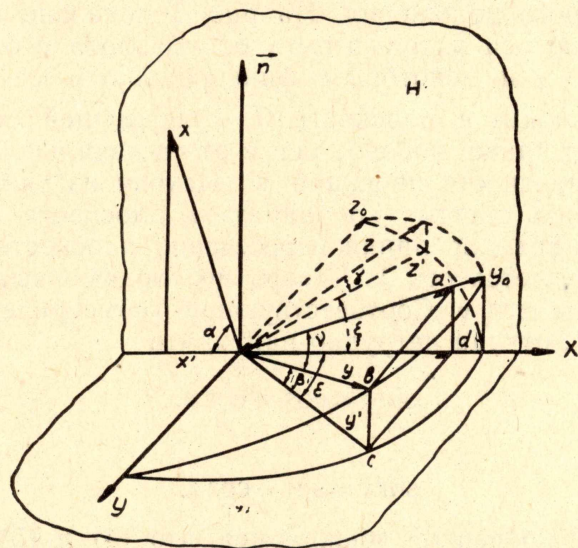


Рис. 1. Геометрические построения к выводу проекционных соотношений

торой точки $A(x, y, z)$ в системе S с координатами (X, Y) проекции этой точки на плоскости W . Для вывода проекционных соотношений необходимо, помимо метода проектирования, задать положение системы S относительно плоскости проекций W . В целом все это определяет аппарат проектирования. Положение системы S сможет считаться фиксированным, если задано положение начала координат и направление осей системы относительно плоскости W .

Для простоты будем считать, что начало координат системы S точка O лежит в плоскости W , направление осей x, y, z зададим соответственно углами α, β, γ (рис. 1). Обозначим через \vec{n} нормаль к плоскости W в точке O . Направление вектора \vec{z} в системе S определится углами α', β', γ' , где

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{\pi}{2} - \alpha, \\ \beta' &= \frac{\pi}{2} - \beta, \\ \gamma' &= \frac{\pi}{2} - \gamma. \end{aligned} \right\} (1)$$

Для системы углов (1) справедливо следующее равенство:

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим аналогичное соотношение для углов α , β , γ , характеризующих аппарат проектирования,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1. \quad (3)$$

Соотношение (3) показывает, что из углов α , β , γ независимыми параметрами являются только два угла, поэтому перейдем в дальнейшем к двум независимым параметрам. В качестве таких параметров удобно выбрать угол наклона какой-либо из осей системы S к плоскости W и угол поворота системы S вокруг этой оси относительно некоторого фиксированного положения. На рис. 1 показано вращение системы S относительно оси x , при этом угол поворота ν определяется как угол между осью y и некоторым фиксированным ее положением y_0 . Вектор (ось) y_0 лежит в плоскости H , содержащей ось x и вектор n . Угол ν определяет также поворот оси z от ее начального положения z_0 , находящегося в плоскости проекций W . Исходя из указанных построений, можно выбрать систему координат на плоскости (X, Y) . Направление оси X выбираем по линии пересечения плоскостей W и H , соответственно определяется ось Y . Теперь необходимо выразить углы β и γ через параметры α и ν . Соответствующие геометрические построения указаны на рис. 1, откуда нетрудно найти, что

$$\sin\beta = \cos\nu \cdot \cos\alpha. \quad (4)$$

Аналогично

$$\sin\gamma = \sin\nu \cdot \cos\alpha. \quad (5)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (4) и (5) удовлетворяют (3), тем самым параметры α и ν полностью определяют вращение системы S в пространстве относительно точки O , при котором ось X не выходит из плоскости H . Отметим, что указанных двух движений (по α и ν) вполне достаточно, чтобы с данного направления, например в направлении нормали, любое выпуклое тело, заданное в системе S , было полностью рассмотрено. Или в другой формулировке: указанных вращений достаточно, чтобы с любого направления была освещена вся поверхность выпуклого тела [7].

В параллельном проектировании выбранных параметров α и ν вполне достаточно для характеристики аппарата проектирования. Метрический параметр l , определяющий расстояние точки O до плоскости по нормали, в этом случае не влияет на форму проекционных соотношений.

Определим положение проекций осей системы S на плоскости W x' , y' , z' относительно системы (X, Y) углами ϵ и ξ (рис. 1). Двух углов вполне достаточно, так как x' проектируется всегда на направление оси X .

Используя построения на рис. 1, нетрудно показать, что

$$\sin\epsilon = \frac{\sin\nu}{\sqrt{1 - \cos^2\nu \cdot \cos^2\alpha}}. \quad (6)$$

Аналогично

$$\sin\xi = \frac{\cos\nu}{\sqrt{1 - \sin^2\nu \cdot \cos^2\alpha}}. \quad (7)$$

Используя (6) и (7), для параллельного проектирования можно записать

$$\begin{cases} X = -x \cos \alpha + y \cos \nu \cdot \sin \alpha + z \sin \nu \cdot \sin \alpha \\ Y = y \sin \nu - z \cos \nu. \end{cases} \quad (8)$$

Соотношения (8) определяют координаты проекции точки (x, y, z) из системы S на плоскости W при данных параметрах проектирования α и ν . С другой стороны, зная значения (X, Y) точки (x, y, z) соотношения (8), определяют значения α и ν , а тем самым — положение системы S (соответственно оригинала) в пространстве относительно плоскости проекций W . В результате реализуется жесткое изображение оригинала на плоскости W .

В некоторых случаях бывает желательным получить изображение оригинала с нанесением проекций осей системы S на плоскости W , при этом между проекциями осей углы должны принять определенное значение, т. е. имеет место задача построения изометрии. Одним из распространенных примеров такой задачи является построение ортогональной изометрии, для которой

$$(\widehat{x', y'}) = (\widehat{x', z'}) = (\widehat{y', z'}) = 120^\circ.$$

Для этого случая углы в плоскости проекций ϵ и ζ равны 60° . Используя (6) и (7), можно определить ориентацию системы S в пространстве. Действительно, относительно параметров α и ν имеем систему

$$\frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - \cos^2 \nu \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \nu \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (9)$$

Решая (9), находим

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \cos \nu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

и соответственно $\alpha = 35^\circ$ и $\nu = 45^\circ$. Аналогично могут быть построены и другие аксонометрические системы осей x', y', z' . Применение полученных результатов для построения проекционных графических изображений функций $z(x, y)$ изложено в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Темников. Автоматические регистрирующие приборы. Машгиз. М., 1960.
2. В. И. Рыбак, А. Н. Шишенок. Индикаторное устройство для вывода результатов наблюдений из машины. «Автоматика и приборостроение», № 1, 1963.
3. В. А. Гартаковский. Построение на АВМ линий, лежащих на n -мерных поверхностях. (Настоящий сборник).
4. М. А. Parker. E. P. R. Wallis. The proceeding Instit. of Elect. Eng. vol. 95. part III, № 37, 1948.

5. P. R. Wallis. Journal of Appl. Phys. vol, 18, № 9, Sept. 1947, p. 818—829.
 6. Геометрия IV. ЭЭМ. Физматгиз, М., 1963.
 7. В. Г. Болтянский. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. «Наука», 1966.
 8. И. Э. Наац, В. М. Рейдер. Построение на АВМ проекционных изображений пространственных фигур методом центрального проектирования. (Настоящий сборник).
-