

## ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории)

В настоящее время все большее значение приобретают вопросы обработки и наглядного представления графической информации, перерабатываемой с помощью вычислительных машин. При этом определенные трудности вызывает регистрация трехмерной информации на двумерной поверхности документа регистрации (бумажной ленте, экране электронно-лучевой трубки и т. д.). Некоторые способы решения указанной задачи можно найти в работах [1, 2].

Одним из возможных вариантов графической регистрации трехмерной информации на плоском носителе является построение проекционных изображений пространственных линий, поверхностей и тел на плоскости проекций. Особенно удобным оказывается применение проекционных методов для вывода информации из аналоговых вычислительных машин при решении трехмерных задач, поскольку в этом случае решение может быть получено в виде трех непрерывных функций времени  $(x(t), y(t), z(t))$ , описывающих движение некоторой точки  $A$  с координатами  $(x, y, z)$  в трехмерном пространстве [3]. При такой форме вывода информации возможна непосредственная графическая регистрация с помощью самопишущих приборов и электронно-лучевых индикаторов. В свою очередь, движение точки  $A$  с координатами  $(x, y, z)$  можно считать, с геометрической точки зрения, движением по поверхности  $z(x, y)$ . Для регистраций рельефа этой поверхности с сохранением наглядности на плоском носителе можно воспользоваться проекционными методами.

Применению указанных методов для целей графической регистрации трехмерной информации посвящены, в частности, работы [4, 5], где основное внимание уделяется вопросам построения так называемых свободных проекционных изображений [6]. При свободном изображении важна наглядность плоского изображения данного тела и совершенно неважно положение оригинала в пространстве. В соответствии с этим параметры, характеризующие аппарат проектирования, остаются неизвестными.

При выводе геометрической информации из машины и, в частности, при моделировании физических процессов на АВМ возникает необходимость по полученному проекционному изображению функции  $z(x, y)$  определить положение оригинала в пространстве. В этом случае необходимо строить так называемые жесткие изображения [6], для которых известны все параметры, характеризующие аппарат проектирования.

При жестком изображении возможно определение положения оригинала в пространстве и метрических соотношений в нем.

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения жестких проекционных изображений для целей вывода геометрической информации из АВМ, представленной в виде функций двух переменных  $z(x, y)$ .

Проекционное изображение какого-либо тела (поверхности, линии), пространственное положение которого определяется в некоторой системе координат  $S$ , на плоскости  $W$  получается в результате проектирования этого тела на указанную плоскость.

Наиболее распространенными методами построения изображений являются параллельное и центральное проектирование. Метод проектирования определяет вид соотношений, связывающих координаты неко-

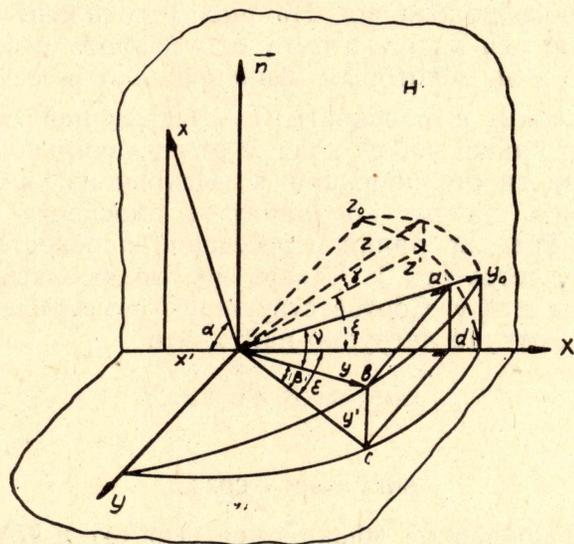


Рис. 1. Геометрические построения к выводу проекционных соотношений

торой точки  $A(x, y, z)$  в системе  $S$  с координатами  $(X, Y)$  проекции этой точки на плоскости  $W$ . Для вывода проекционных соотношений необходимо, помимо метода проектирования, задать положение системы  $S$  относительно плоскости проекций  $W$ . В целом все это определяет аппарат проектирования. Положение системы  $S$  сможет считаться фиксированным, если задано положение начала координат и направление осей системы относительно плоскости  $W$ .

Для простоты будем считать, что начало координат системы  $S$  точка  $O$  лежит в плоскости  $W$ , направление осей  $x, y, z$  зададим соответственно углами  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 1). Обозначим через  $\vec{n}$  нормаль к плоскости  $W$  в точке  $O$ . Направление вектора  $\vec{z}$  в системе  $S$  определится углами  $\alpha', \beta', \gamma'$ , где

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{\pi}{2} - \alpha, \\ \beta' &= \frac{\pi}{2} - \beta, \\ \gamma' &= \frac{\pi}{2} - \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для системы углов (1) справедливо следующее равенство:

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим аналогичное соотношение для углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , характеризующих аппарат проектирования,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1. \quad (3)$$

Соотношение (3) показывает, что из углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  независимыми параметрами являются только два угла, поэтому перейдем в дальнейшем к двум независимым параметрам. В качестве таких параметров удобно выбрать угол наклона какой-либо из осей системы  $S$  к плоскости  $W$  и угол поворота системы  $S$  вокруг этой оси относительно некоторого фиксированного положения. На рис. 1 показано вращение системы  $S$  относительно оси  $x$ , при этом угол поворота  $\nu$  определяется как угол между осью  $y$  и некоторым фиксированным ее положением  $y_0$ . Вектор (ось)  $y_0$  лежит в плоскости  $H$ , содержащей ось  $x$  и вектор  $n$ . Угол  $\nu$  определяет также поворот оси  $z$  от ее начального положения  $z_0$ , находящегося в плоскости проекций  $W$ . Исходя из указанных построений, можно выбрать систему координат на плоскости  $(X, Y)$ . Направление оси  $X$  выбираем по линии пересечения плоскостей  $W$  и  $H$ , соответственно определяется ось  $Y$ . Теперь необходимо выразить углы  $\beta$  и  $\gamma$  через параметры  $\alpha$  и  $\nu$ . Соответствующие геометрические построения указаны на рис. 1, откуда нетрудно найти, что

$$\sin\beta = \cos\nu \cdot \cos\alpha. \quad (4)$$

Аналогично

$$\sin\gamma = \sin\nu \cdot \cos\alpha. \quad (5)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (4) и (5) удовлетворяют (3), тем самым параметры  $\alpha$  и  $\nu$  полностью определяют вращение системы  $S$  в пространстве относительно точки  $O$ , при котором ось  $X$  не выходит из плоскости  $H$ . Отметим, что указанных двух движений (по  $\alpha$  и  $\nu$ ) вполне достаточно, чтобы с данного направления, например в направлении нормали, любое выпуклое тело, заданное в системе  $S$ , было полностью рассмотрено. Или в другой формулировке: указанных вращений достаточно, чтобы с любого направления была освещена вся поверхность выпуклого тела [7].

В параллельном проектировании выбранных параметров  $\alpha$  и  $\nu$  вполне достаточно для характеристики аппарата проектирования. Метрический параметр  $l$ , определяющий расстояние точки  $O$  до плоскости по нормали, в этом случае не влияет на форму проекционных соотношений.

Определим положение проекций осей системы  $S$  на плоскости  $W$   $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  относительно системы  $(X, Y)$  углами  $\epsilon$  и  $\xi$  (рис. 1). Двух углов вполне достаточно, так как  $x'$  проектируется всегда на направление оси  $X$ .

Используя построения на рис. 1, нетрудно показать, что

$$\sin\epsilon = \frac{\sin\nu}{\sqrt{1 - \cos^2\nu \cdot \cos^2\alpha}}. \quad (6)$$

Аналогично

$$\sin\xi = \frac{\cos\nu}{\sqrt{1 - \sin^2\nu \cdot \cos^2\alpha}}. \quad (7)$$

Используя (6) и (7), для параллельного проектирования можно записать

$$\begin{cases} X = -x \cos \alpha + y \cos \nu \cdot \sin \alpha + z \sin \nu \cdot \sin \alpha \\ Y = y \sin \nu - z \cos \nu. \end{cases} \quad (8)$$

Соотношения (8) определяют координаты проекции точки  $(x, y, z)$  из системы  $S$  на плоскости  $W$  при данных параметрах проектирования  $\alpha$  и  $\nu$ . С другой стороны, зная значения  $(X, Y)$  точки  $(x, y, z)$  соотношения (8), определяют значения  $\alpha$  и  $\nu$ , а тем самым — положение системы  $S$  (соответственно оригинала) в пространстве относительно плоскости проекций  $W$ . В результате реализуется жесткое изображение оригинала на плоскости  $W$ .

В некоторых случаях бывает желательным получить изображение оригинала с нанесением проекций осей системы  $S$  на плоскости  $W$ , при этом между проекциями осей углы должны принять определенное значение, т. е. имеет место задача построения изометрии. Одним из распространенных примеров такой задачи является построение ортогональной изометрии, для которой

$$(\widehat{x', y'}) = (\widehat{x', z'}) = (\widehat{y', z'}) = 120^\circ.$$

Для этого случая углы в плоскости проекций  $\epsilon$  и  $\zeta$  равны  $60^\circ$ . Используя (6) и (7), можно определить ориентацию системы  $S$  в пространстве. Действительно, относительно параметров  $\alpha$  и  $\nu$  имеем систему

$$\frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - \cos^2 \nu \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \nu \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (9)$$

Решая (9), находим

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \cos \nu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

и соответственно  $\alpha = 35^\circ$  и  $\nu = 45^\circ$ . Аналогично могут быть построены и другие аксонометрические системы осей  $x', y', z'$ . Применение полученных результатов для построения проекционных графических изображений функций  $z(x, y)$  изложено в работе [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Темников. Автоматические регистрирующие приборы. Машгиз. М., 1960.
2. В. И. Рыбак, А. Н. Шишенок. Индикаторное устройство для вывода результатов наблюдений из машины. «Автоматика и приборостроение», № 1, 1963.
3. В. А. Гартаковский. Построение на АВМ линий, лежащих на  $n$ -мерных поверхностях. (Настоящий сборник).
4. М. А. Parker. E. P. R. Wallis. The proceeding Instit. of Elect. Eng. vol. 95. part III, № 37, 1948.

5. P. R. Wallis. Journal of Appl. Phys. vol, 18, № 9, Sept. 1947, p. 818—829.
  6. Геометрия IV. ЭЭМ. Физматгиз, М., 1963.
  7. В. Г. Болтянский. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. «Наука», 1966.
  8. И. Э. Наац, В. М. Рейдер. Построение на АВМ проекционных изображений пространственных фигур методом центрального проектирования. (Настоящий сборник).
-