

ПРОВЕРКА ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ХААРА—КАРМАНА В УСЛОВИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОСАДКИ

В. А. ОГОРОДНИКОВ, Г. Д. ДЕЛЬ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Осесимметричная деформация является одной из наиболее важных, но недостаточно разработанных задач пластичности. Как и в других пространственных задачах, исходные уравнения для случая осевой симметрии в общем случае не интегрируются, поэтому число аналитических решений в этой области весьма ограничено. Решение некоторых задач получено с введения понятия «полной пластичности», предложенного Хааром и Карманом [1]. По их гипотезе в пластическом состоянии окружное напряжение равно одному из главных напряжений в меридиональной плоскости. Против этого условия выдвигались серьезные возражения [2], тем не менее оно широко используется в инженерной теории пластичности [3].

Целью настоящей работы является проверка возможности определения напряженного состояния при осесимметричной осадке в предположении Хаара—Кармана.

Напряженное состояние изучалось на стали X18H9T и на свинце. Напряжения рассчитывались по деформациям и скоростям деформаций. Исследование деформированного состояния упрочняющегося материала проводилось по распределению твердости, деформированное состояние на свинце изучалось по искажению делительной сетки, нанесенной предварительно на одну из половин составного образца.

При изучении напряженно-деформированного состояния измерением твердости предварительно строится тарировочный график (интенсивность напряжения σ , твердость H , интенсивность деформаций e_i). Тарировочный график исследуемого материала (сталь X18H9T) строился путем испытания восьми цилиндрических образцов на осевое сжатие со смазкой. Твердость измерялась по Бринеллю шариком диаметром 5 мм под нагрузкой 500 кг.

Напряженно-деформированное состояние определялось на трех цилиндрических образцах диаметром 36 и высотой 54 мм. Образцы подвергались осевому сжатию без смазки торцов. Величина осадки цилиндров $\ln \frac{H_0}{H}$ составила 0,095, 0,191 и 0,28. После измерения твердости в центре торца деформированных образцов последние разрезались. Полученная поверхность шлифовалась и в различных точках ее осей симметрии измерялась твердость. По твердости из тарировочных графиков определялась соответствующая ей величина интенсивности деформаций

e_i . Компоненты деформаций e_r и e_φ рассчитывались по методике, изложенной в статье [5]. Кроме того, рассчитывались скорости деформаций по следующей методике. По эпюрам из выражения

$$e_\varphi = \ln \frac{R}{R_0}, \quad (1)$$

где R_0, R — радиус до и после деформирования, определены начальные радиусы R_0 точек плоскости симметрии, перпендикулярной оси z , и построены графики их изменения вдоль радиусов. Задаваясь начальным радиусом, строили графики изменения e_φ, e_r и e_i в зависимости от изменения высоты образца. По тангенсам угла наклона касательных к этим графикам определялись скорости деформации, отнесенные к скорости изменения высоты образца. Располагая данными по деформациям и скоростям деформаций, а также зная интенсивность напряжений σ_i , рассчитывали компоненты девиатора напряжений по соотношениям деформационных теорий

$$s_r = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_r, \quad s_\varphi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_\varphi, \quad (2)$$

и по соотношениям теорий течения

$$s_r = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \dot{e}_r, \quad s_\varphi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \dot{e}_\varphi, \quad (3)$$

где s_r и s_φ — радиальная и окружная компоненты девиатора напряжений.

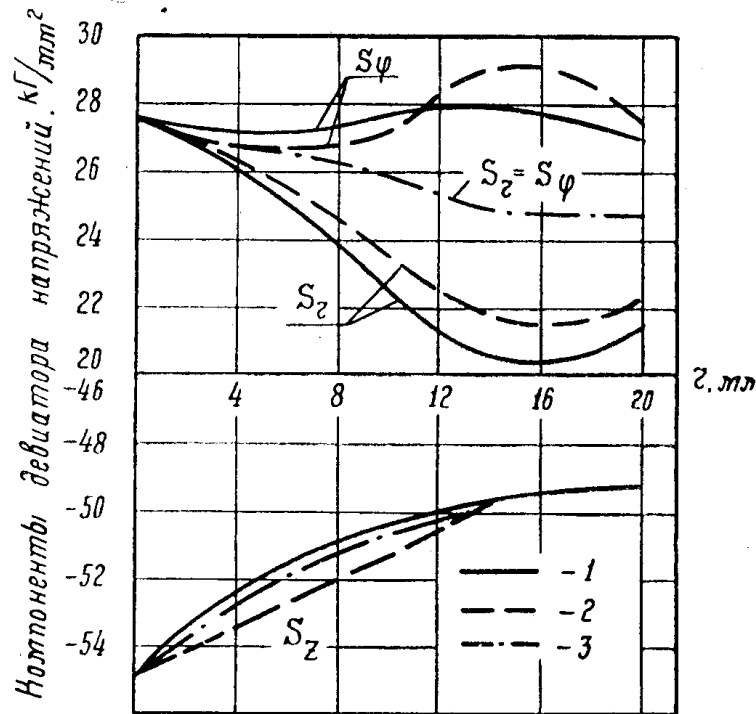


Рис. 1. Компоненты девиатора напряжений на радиусе бочки при осадке цилиндра, рассчитанные по соотношениям деформационных теорий — 1, по теориям течения — 2 и в предположении Хаара—Кармана — 3

На рис. 1 сопоставлены рассчитанные таким путем компоненты девиатора напряжений с определением их по твердости в предположении Хаара—Кармана [4]. Полученные результаты показывают, что s_r и s_φ определяются в предположении Хаара—Кармана со значительной погрешностью. Компонента же s_z определяется в указанном предположении достаточно точно.

Наибольшего расхождения компонентов девиатора напряжений s_r и s_φ следует, вероятно, ожидать в контакте осаживаемых образцов. Для определения s_r и s_φ на торце необходимо знать компоненты деформаций e_r и e_φ . Окружная деформация e_φ определялась по изменению радиусов кернений, нанесенных на торце образца из стали X18H9T до его осадки. Радиальная деформация определялась по соотношению

$$\frac{de_\varphi}{dr} = \frac{e_r - e_\varphi}{r}. \quad (4)$$

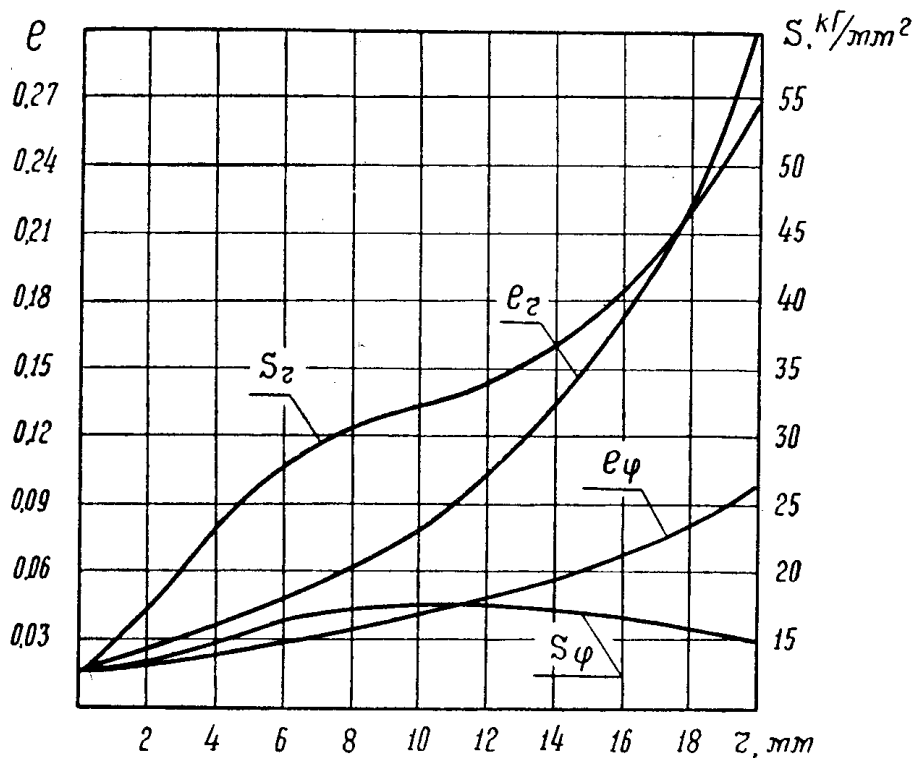


Рис. 2. Компоненты девиатора напряжений и деформации на торце осаживаемого цилиндра

На рис. 2 изображены эпюры деформаций e_r и e_φ . Там же показаны эпюры компонентов девиатора напряжений, рассчитанных по соотношениям деформационных теорий [2].

Как видно из рис. 1 и 2, погрешность определения напряжений в предположении Хаара—Кармана у торцов выше, чем на горизонтальной оси симметрии.

Для проверки предположения Хаара—Кармана на слабоупрочняющемся материале исследование проводилось на составном свинцовом образце. Сетка из системы окружностей диаметром 3 мм располагалась в меридиональном сечении образца. Образец был составлен из двух спаянных в меридиональной плоскости полуцилиндров, запрессованных с небольшим натягом в свинцовую обойму диаметром 107 мм.

В дальнейшем обойма с составным образцом осаживалась до деформации, равной 10%.

Вдоль горизонтальной оси симметрии определялась окружная деформация и радиальная

$$e_{\varphi} = \ln \frac{R}{R_0}, \quad e_r = \ln \frac{b}{d_0}, \quad (5)$$

где R_0, R — радиус точки до и после деформации,

b — большая ось эллипса, d_0 — исходный диаметр отпечатка. Радиальная деформация также проверялась по соотношению [4].

Для расчета напряжений необходимо знать угол φ между направлением главных деформаций и горизонтальной осью. Угол φ измерялся (как и деформации) в различных точках меридиональной плоскости на инструментальном микроскопе. Напряженное состояние рассчитывалось в четверти меридионального сечения.

Согласно деформационной теории

$$\tau_{rz} = \frac{\sigma_i}{3e_i} g_{rz}. \quad (6)$$

Интенсивность деформации и сдвиг равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2} \\ g_{rz} &= \pm (e_1 - e_2) \sin 2\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где e_1, e_2 — главные деформации в меридиональном сечении ($e_1 > e_2$). Учитывая, что $e_3 = -e_1 - e_2$, находим

$$\tau_{rz} = \frac{\sqrt{3} \sigma_i}{6} \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2}} \sin 2\varphi \quad (8)$$

или

$$\tau_{rz} = \frac{\sigma_i}{2} (M_1 - M_2) \sin 2\varphi, \quad (9)$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{e_2}{e_1} + \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^2}}, \quad M_2 = M_1 \frac{e_2}{e_1}. \quad (10)$$

Радиальная компонента дивергента напряжений

$$s_r = \sigma_r - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_r.$$

Соответствующая ей деформация

$$e_r = e_1 \cos^2 \varphi + e_2 \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Учитывая (10), находим

$$s_r = (M_1 \cos^2 \varphi + M_2 \sin^2 \varphi) \sigma_i. \quad (12)$$

Окружная деформация

$$e_{\varphi} = -e_1 - e_2.$$

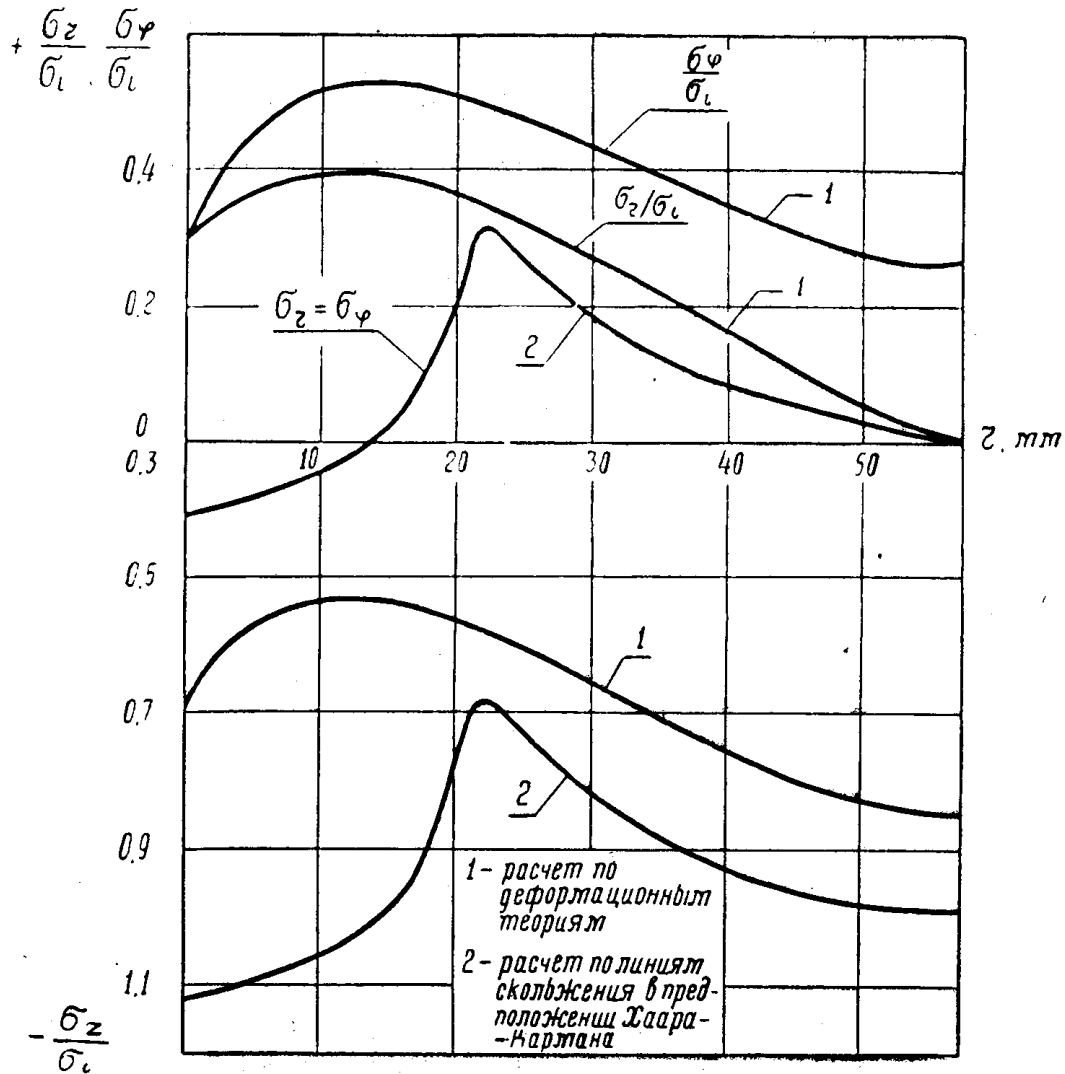


Рис. 3. Напряжения при осадке цилиндра

После несложных преобразований получаем

$$s_\varphi = \sigma_\varphi - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_\varphi = -(M_1 + M_2) \sigma_i. \quad (13)$$

В осевом направлении

$$e_z = e_1 \sin^2 \varphi + e_2 \cos^2 \varphi, \quad (14)$$

$$s_z = \sigma_z - \sigma = (M_1 \sin^2 \varphi + M_2 \cos^2 \varphi) \sigma_i. \quad (15)$$

Для определения гидростатического давления интегрируем одно из дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (16)$$

Расчет напряжений начинаем от свободной границы.

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_r)_A - \int_A^B \left[\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{s_r - s_\varphi}{r \sigma_i} \right] dr. \quad (17)$$

Определив напряжения $\frac{\sigma_r}{\sigma_i}$ вдоль горизонтальной оси симметрии, вычитаем из них соответствующие компоненты девиатора напряжений, отнесенные к σ_i , и находим гидростатическое давление $\frac{\sigma}{\sigma_i}$. Прибавив его к остальным компонентам девиатора, находим соответствующие им нормальные напряжения.

Напряжения рассчитывались также методом линий скольжения в предположении Хаара—Кармана с привлечением аппарата теории идеально-пластических тел [6].

В результате получены эпюры распределения напряжений вдоль радиуса бочки, рассчитанные по двум методикам. Эпюры представлены на рис. 3. Как следует из графиков, компоненты напряжений $\frac{\sigma_r}{\sigma_i}$ и $\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_i}$ не совпадают. Вблизи свободной границы наблюдается близкое совпадение эпюр осевых напряжений, полученных двумя методиками. К центру образца расхождение становится значительным, по-видимому, это объясняется нарастанием погрешности, связанной с интегрированием дифференциального уравнения равновесия.

Результаты исследования показывают, что в условиях осесимметричной осадки предположение Хаара—Кармана не подтверждается, в силу этого определение напряженного состояния в этом предположении связано с большими погрешностями. При этом погрешности определения окружного и радиального напряжений выше погрешностей, связанных с определением осевого напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Наар, Th. von Karman, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Mathphys. Klasse, 1909.
2. Р. Хилл. Математическая теория пластичности, 1956.
3. Е. П. Унксон. Инженерная теория пластичности, 1956.
4. Г. Д. Дель. Исследование пластической деформации измерением твердости. Изв. ТПИ, т. 138, 1965.
5. Г. Д. Дель. Определение деформированного состояния в пластической области по распределению твердости (в печати).
6. А. Ю. Ишлинский. Осесимметричная задача пластичности и проба Бриелля. Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 3. 1944.