ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 190 1968

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Д. И. САННИКОВ

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

При анализе тепловых схем замещения электрических машин в ходе разработки методик теплового расчета оказываются полезными различные преобразования этих схем.

В настоящей работе рассматривается три вида преобразований схем стационарного нагрева и приводятся примеры их использования.

Тепловая схема составляется на основе теплового баланса различных элементов электрической машины или на основе решения дифференциальных уравнений теплопроводности [2] и состоит из узлов с источниками тепла P, соединенных тепловыми проводимостями G. Предполагается, что узлы, изображающие элементы охлаждающего потока, имеют фиксированную температуру и что схема линейна.

Тепловой баланс для i-го узла схемы

$$P_i = \sum_{\substack{к=a \\ к \neq i}}^{n} (\theta_i - \theta_к) G_{iк}, \tag{1}$$

где

$\theta$ — температуры узлов,

$k$ — порядковые номера узлов, изменяющиеся от a до n,

$G_{ik}$ — взаимные проводимости, приводит к уравнению

$$-\theta_i \sum_{\substack{к=a \\ к \neq i}}^{n} G_{iк} + \sum_{\substack{к=a \\ к \neq i}}^{n} \theta_к G_{iк} + P_o = 0. \tag{2}$$

Схема в целом описывается системой аналогичных уравнений [4]

$$\| G_{iк} \| \times \theta_i + P_i = 0. \tag{3}$$

Каждый диагональный член матрицы проводимостей согласно (2) равен

$$G_{ii} = -\sum_{\substack{к=a \\ к \neq i}}^{n} G_{iк} \tag{4}$$

и может быть назван собственной проводимостью узла, взятой со знаком минус.

## Исключение узла из схемы

Выделим из схемы узел с индексом О (рис. 1, *а*). Исключая уравнение данного узла

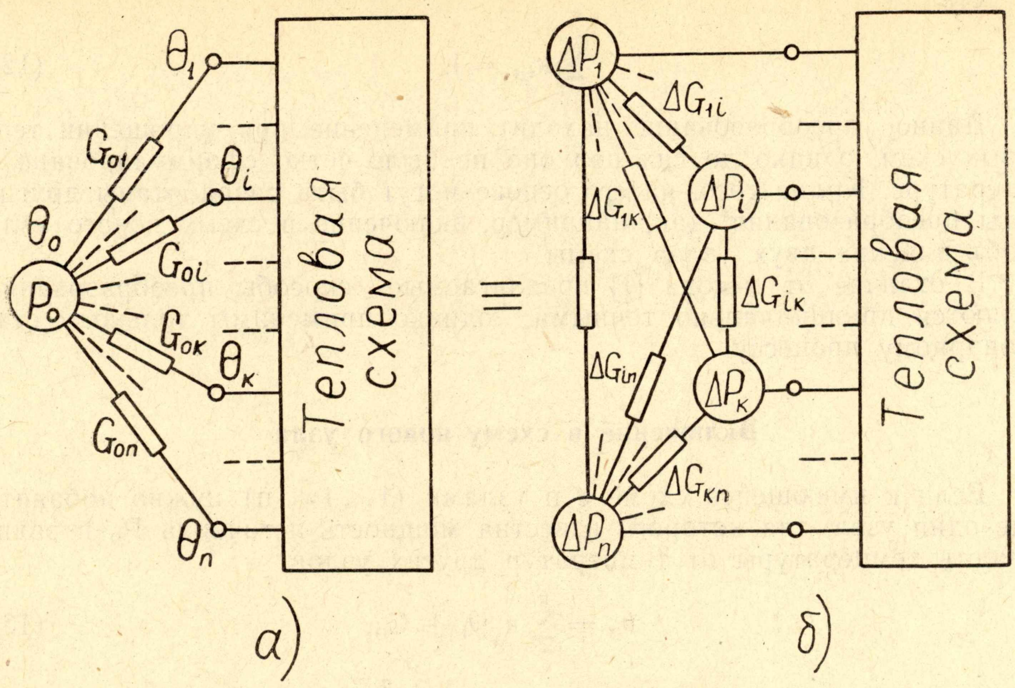


Рис. 1. Исключение узла из тепловой схемы

$$\theta_0 \sum_{i=1}^{n} G_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i G_{0i} + P_0 \tag{5}$$

из системы (3) методом подстановок, получим систему, которая соответствует новой схеме с уменьшенным на единицу количеством узлов (рис. 1, б). Таким образом происходит преобразование звезды в эквивалентный многоугольник со следующими параметрами:

а) приращение источников остающихся узлов

$$\Delta P_i = P_0 \kappa_{0i}, \tag{6}$$

где

$$\kappa_{0i} = \frac{G_{0i}}{(-G_{00})} \tag{7}$$

коэффициент приведения источника исключаемого узла к остающемуся узлу,

$$(-G_{00}) = \sum_{\kappa=1}^{n} G_{0i} \tag{8}$$

собственная проводимость исключаемого узла;

б) приращение проводимостей между остающимися узлами

$$\Delta G_{i\kappa} = \frac{G_{0i} G_{0\kappa}}{(-G_{00})}; \tag{9}$$

в) приращение собственных проводимостей

$$\Delta G_{ii} = -\frac{G_{0i}^2}{(-G_{00})}. \tag{10}$$

Следует отметить, что суммарная мощность источников тепла схемы не меняется, так как

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = P_0 \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} G_{0i}}{(-G_{00})} = P_0, \tag{11}$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_{oi} = 1. \tag{12}$$

Данное преобразование находит применение при упрощении тепловых схем, однако до сих пор оно не было четко сформулировано в литературе. Кроме того, на его основе могут быть разработаны другие виды преобразования, как, например, включение в схему нового узла и объединение двух узлов схемы.

В отличие от метода [1] предлагаемые способы преобразования являются принципиально точными, однако применимы только к стационарному процессу.

## Включение в схему нового узла

Если к имеющейся схеме с n узлами ($1 \leqslant i \leqslant n$) нужно добавить еще один узел, для которого известна мощность источника $P_o$ и зависимость температуры от температур других узлов

$$\theta_o = \sum_{i=1}^{n} \kappa_{oi}\theta_i + C_o, \tag{13}$$

(причем должно соблюдаться условие $\sum_{i=1}^{n} k_{oi} = 1$, что всегда может быть достигнуто использованием узла с нулевой температурой), то прежде всего необходимо привести эту зависимость к виду (5) путем умножения (13) на масштабный коэффициент

$$\kappa_m = \frac{P_o}{C_o}, \tag{14}$$

В результате будет получено уравнение узла, то есть звезды проводимостей

$$G_{oi} = \kappa_{oi} \cdot \kappa_m = \kappa_{oi} \cdot \frac{P_o}{C_o} \tag{15}$$

с источником при вершине — $P_o$ и собственной проводимостью

$$(-G_{oo}) = \kappa_m. \tag{16}$$

Непосредственное присоединение этой звезды к узлам схемы приводит к нарушению существующих связей, которое может быть скомпенсировано одновременным присоединением второй звезды с измененным знаком параметров, то есть с проводимостями $(-G_{oi})$ и источником $(-P_o)$. Правильность такого преобразования доказывается тем, что исключение обоих присоединенных узлов по ранее рассмотренному методу приводит к исходной схеме.

Вторую присоединенную звезду целесообразно преобразовать в многоугольник для устранения лишнего узла. Таким образом, включение в схему нового узла осуществляется путем присоединения звезды с параметрами $G_{oi}$ и $P_o$ и одновременного прибавления к источникам схемы компенсирующих приращений

$$\Delta P_i = -\frac{P_o G_{oi}}{(-G_{oo})} = -P_o k_{oi}, \tag{17}$$

а к проводимостям — компенсирующих приращений.

$$\Delta G_{ik} = -\frac{G_{oi} G_{ok}}{(-G_{oo})} = -\kappa_{oi} \cdot \kappa_{ok} \cdot \kappa_m. \tag{18}$$

Использование данного преобразования может быть проиллюстрировано следующим примером. Пусть требуется учесть сток тепла с торцевой поверхности сердечника якоря или статора, не имеющего радиальных каналов рис. 2, *а*). Ввиду низкой теплопроводности пакета в направлении поперек листа ($\lambda'_{cm}$) аксиальный тепловой поток в сердечнике имеет заметную величину только в непосредственной близости от торца, создавая здесь значительный перепад температуры сердечника $\theta_c$ вдоль оси якоря (рис. 2, *б*). По сравнению с изменением $\theta_c$ в данной зоне можно принять

$$\theta_м = \text{const}, \ \theta_f = \text{const}$$

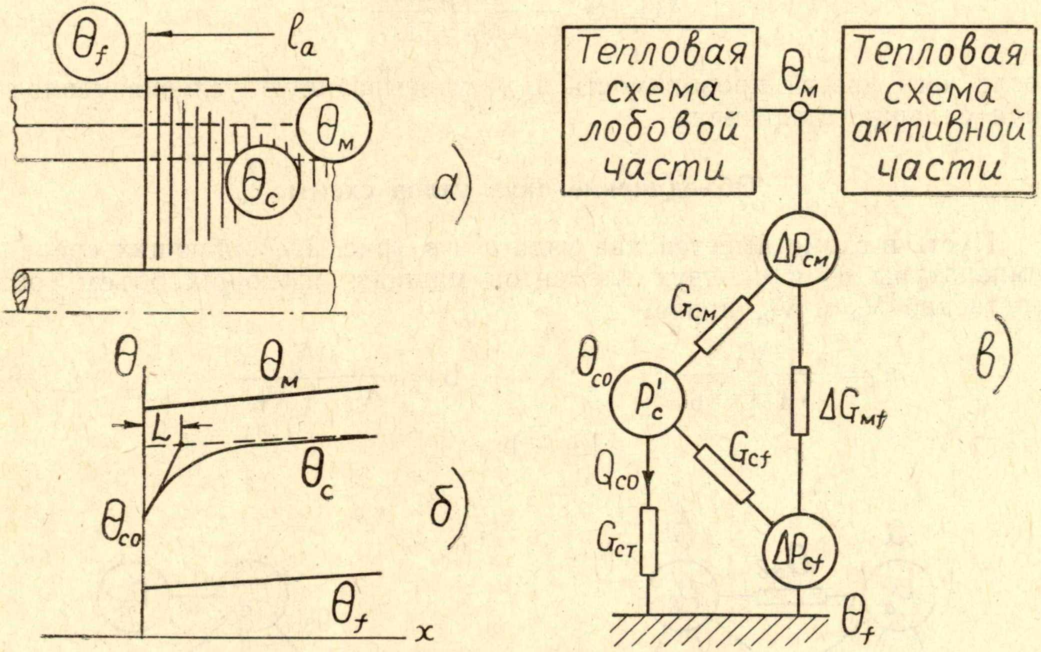


Рис. 2. Включение в тепловую схему якоря узла, учитывающего охлаждение торцов сердечника.

и, рассматривая сердечник как теплопроводящий стержень, ориентированный вдоль оси x, связанный с обмоткой и воздухом проводимостями $\Lambda_{cм}$ и $\Lambda_{cf}$ на единицу длины и имеющий распределенные по длине потери с плотностью $p_c$, получить экспоненциальный характер распределения $\theta_c$ вдоль якоря.

Поскольку постоянная распространения экспоненты

$$L = \frac{1}{\sqrt{(\Lambda_{cм} + \Lambda_{cf})r_c}} \ll l_a,$$

где $r_c$ — аксиальное тепловое сопротивление на единицу длины пакета, можно пренебречь влиянием противоположного торца.

Выражение для теплового потока, переходящего из торца пакета в воздух

$$Q_{co} = \frac{1}{r_c} \ \frac{d\theta_c}{dx\,(x=0)} = (\theta_{co} - \theta_f)G_{cт}$$

приводит к уравнению вида (5) для температуры торца

$$\theta_{co}(\Lambda_{cм} + \Lambda_{cf})L = \theta_м\Lambda_{cм}L + \theta_f\Lambda_{cf}L + p_cL - Q_{co}.$$

Таким образом, на основании полученного выражения и разработанного ранее способа преобразования схем нужно для учета теплового потока $Q_{CO}$ в исходную тепловую схему якоря включить узел с температурой $\theta_{co}$ (рис. 2, *в*), источником

$$P'_c = p_c L$$

и проводимостями

$$G_{cM} = \Lambda_{cM} L; \quad G_{cf} = \Lambda_{cf} L,$$

затем присоединить компенсирующие источники и проводимости

$$\Delta P_{cM} = - P'_c \frac{\Lambda_{cM}}{\Lambda_{cM} + \Lambda_{cf}}; \qquad \Delta P_{cf} = - P'_c \frac{\Lambda_{cf}}{\Lambda_{cM} + \Lambda_{cf}}$$

$$\Delta G_{Mf} = - \frac{G_{cM} G_{cf}}{G_{cM} + G_{cf}},$$

после чего ввести проводимость $G_{CT}$, учитывающую условия теплоотдачи с торца сердечника.

### Объединение двух узлов схемы

Пусть в схеме имеется два узла *a* и *в* (рис. 3, *a*), дающих средние температуры $\theta_a$ и $\theta_b$ двух элементов машины, имеющих объем соответственно $V_a$ и $V_b$, причем

$$a = \frac{V_a}{V_a + V_b}; \qquad b = \frac{V_b}{V_a + V_b}, \tag{19}$$

$$(a + b = 1).$$

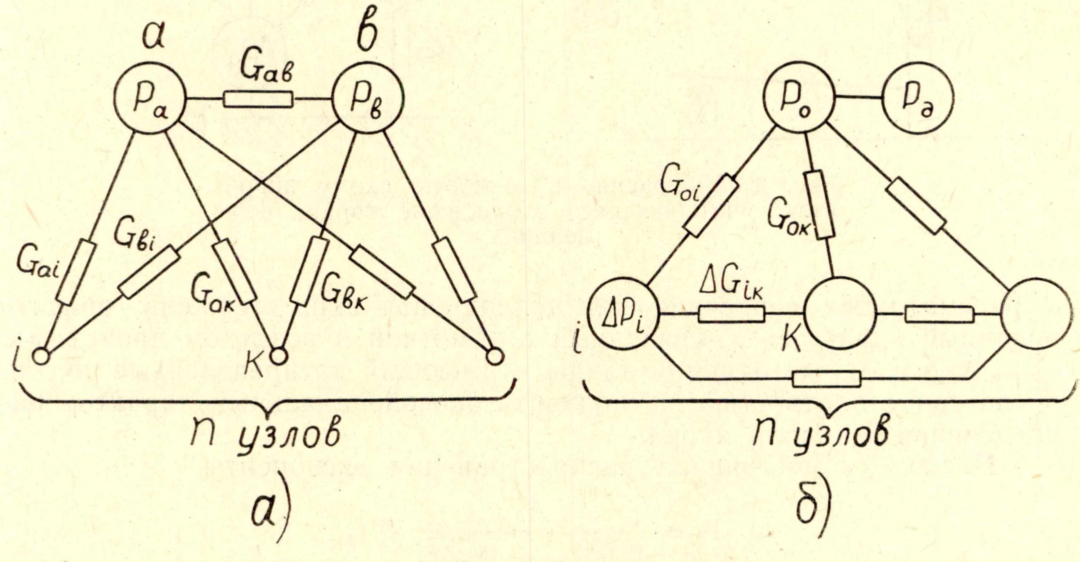


Рис. 3. Объединение двух узлов тепловой схемы

Распределение источников тепла между узлами в общем случае не пропорционально объему

$$P_a = P_o(a + \Delta); \qquad P_b = P_o(b - \Delta) \tag{20}$$

$$P_o = P_a + P_b \tag{21}$$

Требуется заменить оба узла одним, имеющим среднюю температуру

$$\theta_o = a\theta_a + b\theta_b \tag{22}$$

и источник $P_o$ (рис. 3, *б*).

Уравнения узлов *а* и *в* могут быть представлены в виде системы

$$\begin{cases} \theta_a(G_a + G_{ab}) - \theta_b G_{ab} = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i G_{ai} + P_a \\ -\theta_a G_{ab} + \theta_b(G_b + G_{ab} = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i G_{bi} + P_b, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$G_a = \sum_{i=1}^{n} G_{ai}; \qquad G_b = \sum_{i=1}^{n} G_{bi}. \tag{24}$$

Решая (23) относительно $\theta_a$ и $\theta_b$ и подставляя полученные выражения в (22), имеем

$$\theta_o = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{A_i}{D} + P_o \frac{C}{D} + P_o \frac{\Delta(aG_b - bG_a)}{D} \tag{25}$$

Здесь

$$D = (G_a + G_{ab})(G_b + G_{ab}) - G_{ab}^2 \tag{26}$$

— определитель системы (23)

$$A_i = G_{ai}(aG_b + G_{ab}) + G_{bi}(bG_a + G_{ab}) \tag{27}$$

$$C = a^2 G_b + G_{ab} + b^2 G_a. \tag{28}$$

Умножая (25) на D/C, получаем уравнение объединенного узла «О»

$$\frac{D}{C}\theta_o = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{A_i}{C} + P_o + P_\partial. \tag{29}$$

Ввиду наличия дополнительного источника тепла

$$P_\partial = P_o \frac{\Delta}{C}(aG_b - bG_a), \tag{30}$$

первоначально сформулированное условие преобразования выполняется не полностью. Причиной этого является непропорциональное распределение источников, характеризующееся коэффициентом $\Delta$. Попытка во что бы то ни стало избавиться от $P_\partial$ путем замены множителя D/C множителем

$$\frac{D}{C + \Delta(aG_b - bG_a)}$$

приводит к зависимости проводимостей схемы от источников тепла и чрезмерно усложняет расчет. Поэтому следует принять окончательно выражения (29, 30).

В соответствии с вышеизложенным преобразование схемы заключается в следующих трех операциях:

1) исключение узлов «а» и «в», которое приводит к изменению источников и взаимных проводимостей остальных узлов на $\Delta P_1'$ и $\Delta G_{ik}'$;

2) присоединение узла «О» (29) с источником ($P_o + P_\partial$) и проводимостями

$$G_{oi} = \frac{A_i}{C}, \tag{31}$$

собственная проводимость которого

$$G_o = \frac{D}{C}; \tag{32}$$

3) присоединение компенсирующего многоугольника, имеющего, в соответствии с правилами включения в схему нового узла, параметры $\Delta P_1''$ и $\Delta G_{1к}''$ (17, 18).

Общее изменение источников и взаимных проводимостей узлов схемы в результате первой и третьей операции составляет

$$\Delta P_i = \Delta P'_i + \Delta P''_i = P_o \frac{\Delta}{C}(bG_{ai} - aG_{bi}), \tag{33}$$

$$\Delta G_{iк} = \Delta G'_{iк} + \Delta G''_{iк} = \frac{(bG_{ai} - aG_{bi})(bG_{bк} - aG_{aк})}{C}. \tag{34}$$

При этом соблюдается баланс источников тепла

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = P_o.$$

Данный вид преобразования, несмотря на некоторую сложность формул, оказывается эффективным в тех случаях, когда параметры исключаемых узлов являются взаимозависимыми.

В качестве примера может быть рассмотрена тепловая схема замещения лобовой части обмотки якоря машины постоянного тока. Если обмотка выполнена из мягких секций, не имеет при этом решетки в лобовых частях и обмоткодержатели не охлаждаются воздухом (рис. 4, $a$), то практически все тепло, выделяемое в нижнем слое ло-

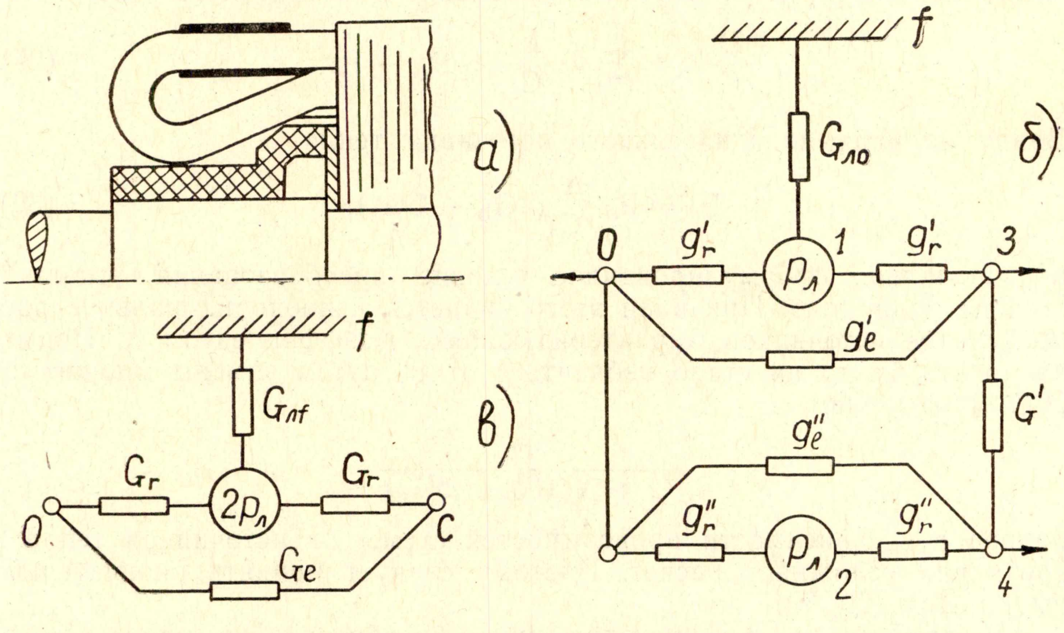


Рис. 4. Объединение верхнего и нижнего слоя лобовых частей при преобразовании тепловой схемы якоря

бовых частей, передается в верхний слой, распространяясь вдоль проводников. Можно показать, что передача тепла через междуслойную изоляцию при этом пренебрежимо мала.

Тепловая схема, составленная на основе [2], изображена на рис. 4, $б$. Длина участков секции, расположенных в верхнем и нижнем слое, считается одинаковой, поэтому источники тепла $p_л$ для обоих слоев и аксиальные тепловые сопротивления R равны.

$G_{ло}$ — проводимость от верхнего слоя к воздуху.

Аксиальные проводимости с достаточной точностью выражаются формулами:

для верхнего слоя

$$g'_r = \frac{6}{R}\left(1 + \frac{m}{60}\right); \qquad g'_l = -\frac{2}{R}\left(1 - \frac{m}{60}\right), \tag{35}$$

где

$$m = RG_{ло} \tag{36}$$

для нижнего слоя

$$g''_r = \frac{6}{R}; \qquad g''_l = -\frac{2}{R}, \tag{37}$$

$G'$ — проводимость, учитывающая связь между слоями обмотки в активной части якоря.

При тепловом расчете якоря нецелесообразно разделять обмотку на два слоя, но следует в то же время учитывать влияние плохо охлаждаемого нижнего слоя лобовых частей на среднюю температуру обмотки. Попарное объединение узлов 1 и 2, представляющих среднюю температуру слоев, и узлов 3 и 4, которые соответствуют граничным сечениям между лобовой и пазовой частью, позволяет достаточно просто решить данный вопрос.

При замене узлов 1 и 2 одним узлом «Л»

$$a = b = 0{,}5; \qquad \Delta = 0; \qquad G_{ab} = G_{12} = 0, \tag{38}$$

$$G_a = G_1 = G_{ло} + 2g'_r = \frac{12}{R}\left(1 + \frac{m}{10}\right),$$

$$G_в = G_2 = 2g_r'' = \frac{12}{R}, \tag{39}$$

$$C = 0{,}25(G_1 + G_2) = \frac{6}{R}\left(1 + \frac{m}{20}\right), \tag{40}$$

$$P_л = 2p_л; \qquad P_\partial = 0; \qquad \Delta P_i = 0. \tag{41}$$

Используя при расчете по (31) формулы упрощенного умножения и деления, благодаря малости вторых членов в выражениях (35—40), получаем

$$G'_{лf} = G_{ло}\left(1 - \frac{m}{20}\right), \tag{42}$$

$$G_{л3} = \frac{6}{R}\left(1 - \frac{m}{30}\right); \qquad G_{л4} = \frac{6}{R}\left(1 + \frac{m}{20}\right); \qquad G_{ло} = \frac{12}{R}\left(1 + \frac{m}{20}\right). \tag{43}$$

Подобный вид приобретают и выражения для взаимных проводимостей остальных узлов.

Аналогичным образом узлы 3 и 4 объединяются в узел «С», и схема приобретает окончательный вид (рис. 4, в), причем для упрощения схемы проводимости $G_{of}$ и $G_{cf}$, имеющие незначительную величину, добавляются к проводимости $G_{лf}$.

Параметры схемы:

$$G_{лf} = G_{ло}\left[1 - \frac{m}{24}\left(1 + \frac{2{,}85}{1 + 2G'R}\right)\right], \tag{44}$$

$$G_r = \frac{12}{R}; \qquad G_l = -\frac{4}{R}. \tag{45}$$

Проводимость $G_{лf}$ учитывает с достаточной точностью влияние различных условий охлаждения верхнего и нижнего слоя обмотки на среднюю температуру лобовых частей и может быть рекомендована для использования в различных методиках теплового расчета якоря.

## Выводы

1. При составлении и анализе тепловых схем замещения и разработке методов их расчета могут эффективно использоваться такие виды преобразования, как исключение узла из схемы, включение в схему нового узла и объединение двух узлов схемы.

2. Данные преобразования являются принципиально точными, однако применение различных способов упрощения формул существенно повышает их эффективность, то есть, в конечном счете, способствует повышению точности тепловых расчетов без существенного их усложнения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Боляев. Повышение точности теплового расчета электрической машины методом эквивалентных тепловых схем при малом числе элементов. «Электромеханика», № 1, 1965.

2. Д. И. Санников. Эквивалентные тепловые схемы тел с одномерным температурным полем. Известия ТПИ, т. 138, 1965.