

## УСТОЙЧИВОСТЬ РАБОТЫ БЕСКОЛЛЕКТОРНОГО ЭМУ ПОСТОЯННОГО ТОКА В НАГРУЗОЧНОМ РЕЖИМЕ

Э. Н. ПОДБОРСКИЙ, А. И. СКОРОСПЕШКИН, Е. К. ДЕРГОВУЗОВА

(Рекомендована научным семинаром кафедр электрических машин  
и общей электротехники)

Анализ устойчивости построением областей устойчивости имеет большое практическое значение, так как позволяет определить, какие значения должны иметь параметры, регулируемые при настройке, чтобы усилитель работал устойчиво. Поэтому в настоящей статье составлены и решены системы дифференциальных уравнений, описывающих работу усилителя при активной, активно-индуктивной и двигательной нагрузках. Коэффициенты характеристических уравнений рассчитаны для модели бесколлекторного ЭМУ постоянного тока, изготовленного по схеме, приведенной в [1]. Области устойчивости рассчитаны по критерию Гурвица в плоскости двух параметров, меняющихся при настройке степени компенсации  $\varepsilon_2$  и угла сдвига коммутационной оси с геометрической нейтрали  $\beta_2$ .

При работе на активно-индуктивную нагрузку динамические свойства усилителя описываются следующей системой уравнений:

$$\Phi_1 = \lambda_1(W_y i_y - W_p i_2), \quad (1)$$

$$\Phi_2 = \lambda_2(W_{p2} i_2 - \frac{W_3 I_3}{\pi} \beta_2), \quad (2)$$

$$U_y = r_y i_y + \sigma_y W_y p \Phi_1, \quad (3)$$

$$e_2 = C_1 \Phi_1 = r_2 i_2 + \sigma_{p2} W_{p2} p \Phi_2 + \frac{C_1 \lambda_1 W_{p1} \beta_1}{\pi} i_2, \quad (4)$$

$$\sigma_k W_{kp} \Phi_2 + R_k i_k - r_{ш} i_3 = 0, \quad (5)$$

$$e_3 = C_2 \Phi_2 = r_3 i_3 + r_k i_k + r_{н} i_3 + p L_{н} i_3 + \sigma_k W_{kp} \Phi_2 + \frac{C_2 \lambda_2 W_3 \beta_2}{\pi} i_3 - \quad (6)$$

$$- 6_3 W_3 p \Phi_2,$$

где

$i_3$  — ток нагрузки,

$r_{н}$  — сопротивление нагрузки,

$L_{н}$  — индуктивность цепи нагрузки.

Остальные обозначения даны в [1].

Решая систему (1—6) относительно тока  $i_3$ , получим зависимость выходного тока от сигнала управления

$$[(1 + pT_y)(1 + pT_2 + K''_p) + K_p(1 + pT_y) - T_y K_{pP}] \left\{ (1 + pT_{н} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_3 \beta_2}{\pi} + \frac{K_3 \beta_2}{\pi} \left[ 1 + \frac{\sigma_3 W_3 p (1 - \varepsilon_2)}{C_2} \right] \Big] i_3 - \left[ \frac{T_2 W_3 \beta_2}{W p^2 \pi} (1 + p T_y) p \right] \times \\
& \times \left\{ \frac{K_2 \Gamma_2}{R_3} \left[ 1 + \frac{\sigma_3 W_3 p (1 - \varepsilon_2)}{C_2} \right] \right\} i_3 = \frac{K_2 K_u}{R_3} \left[ 1 + \frac{\sigma_3 W_3 p (1 - \varepsilon_2)}{C_2} \right] U_y,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$R_3 = r_3 + \frac{\Gamma_k \Gamma_{III}}{R_k} + r_H,$$

$$T_H = \frac{L_H}{R_3} \text{ — постоянная времени цепи нагрузки,}$$

$$K_3 = \frac{C_2 \lambda_2 W_3}{R_3}.$$

Уравнению (7) соответствует характеристическое уравнение

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \tag{8}$$

где

$$a_0 = T_y T_2 T_H;$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & T_y T_2 + \frac{T_y T_2 K_3 \beta_2}{\pi} + \left[ T_y + T_2 + T_y k''_p \right] T_H + \\
& + \frac{(T_y + T_2 + T_y k_p) K_3 \beta_2 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{\pi C_2} - \frac{T_2 K_3 \beta_2 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{\pi C_2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & (T_y + T_2 + T_y k_p'') \left( 1 + \frac{2K_3 \beta_2}{\pi} \right) + \left( 1 + k''_p + k_p \right) \left[ T_H + \right. \\
& \left. + \frac{K_3 \beta_2 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{\pi C_2} \right] - \frac{T_2 k_3 \beta_2}{\pi};
\end{aligned}$$

$$a_3 = (1 + k''_p + k_p) \left( 1 + \frac{2K_3 \beta_2}{\pi} \right).$$

Поскольку БЭМУ постоянного тока описывается системой уравнений, имеющей характеристическое уравнение не выше четвертого порядка, поэтому для построения областей устойчивости воспользуемся критерием Гурвица.

Чтобы исследовать влияние степени компенсации и сдвига коммутационной оси с геометрической нейтрали, необходимо построить области устойчивости в плоскости двух параметров  $\varepsilon_2$  и  $\beta_2$ .

Для этого коэффициенты характеристического уравнения  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  представим в виде:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0' + x_2 a_0'', & a_2 &= a_2' + x_2 a_2'', \\
a_1 &= a_1' + x_2 a_1'', & a_3 &= a_3' + x_2 a_3'',
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $x_2 = \frac{2\beta_2}{\pi}$  — относительный сдвиг коммутационной оси,

$$\begin{aligned}
a_0' &= T_y T_2 T_H, & a_0'' &= 0, \\
a_1 &= T_y T_2 + (T_y + T_2 + T_y k_p'') T_H,
\end{aligned}$$

$$a_1'' = \frac{T_y T_2 k_3}{2} + \frac{(T_y + T_2 + T_y k''_p) k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \epsilon_2)}{2c_2} - \frac{T_2 k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \epsilon_2)}{2c_2},$$

$$a'_2 = T_y + T_2 + T_y k''_p + (1 + k_p + k''_p) T_H,$$

$$a''_2 = (T_y + T_2 + T_y k''_p) k_3 + \frac{(1 + k_p + k''_p) k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \epsilon_2)}{2c_2} - \frac{T_2 k_3}{2},$$

$$a'_3 = 1 + k_p + k''_p,$$

$$a''_3 = (1 + k_p + k''_p) k_3.$$

Для системы, имеющей характеристическое уравнение третьего порядка с положительными коэффициентами, граница устойчивости определяется условием

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0. \quad (10)$$

Величина сдвига коммутационной оси, соответствующая устойчивости, определялась из выражения (10), а также из условия равенства нулю каждого коэффициента характеристического уравнения. Расчеты показали, что минимальное значение  $x_2$ , при котором усилитель попадает на границу устойчивости, определяется из равенства нулю свободного члена уравнения (8) и равно

$$x_2 = - \frac{a'_3}{a''_3}.$$

При этом характеристическое уравнение будет иметь три корня:

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Корни  $p_{2,3}$  комплексные с отрицательной вещественной частью. При сдвиге коммутационной оси с границы устойчивости по направлению вращения корень  $p_1$  становится отрицательным и переходный процесс будет протекать монотонно с затухающими колебаниями.

При сдвиге коммутационной оси против направления вращения за границу устойчивости коэффициент  $a_3$  становится отрицательным. При этом хотя бы один корень будет положительным, и в усилителе наступает процесс самовозбуждения.

В случае активной нагрузки характеристическое уравнение (8) принимает вид

$$a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (11)$$

При положительных коэффициентах  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  усилитель будет работать в области устойчивости, корни уравнения (11) будут или вещественные отрицательные при

$$a_2^2 > 4a_1 a_3,$$

или комплексные с отрицательной вещественной частью при

$$a_2^2 < 4a_1 a_3.$$

Границей периодического и аperiodического затухающих процессов является условие

$$a_2^2 = 4a_1 a_3.$$

При  $a_3=0$  усилитель попадает на границу устойчивости, при этом коммутационная ось смещается против направления вращения якоря на величину

$$x_2 = - \frac{a'_3}{a''_3} . \quad (12)$$

Если коммутационная ось сместится против направления вращения на величину, большую, чем полученную из равенства (12), в усилителе наступает процесс самовозбуждения.

Таким образом, при активной и активно-индуктивной нагрузке усилитель будет работать устойчиво, если угол сдвига коммутационной оси против направления вращения будет менее величины, определяемой равенством (12).

Рассмотрим области устойчивости при работе усилителя на двигатель постоянного тока независимого возбуждения. Уравнения системы бесколлекторный ЭМУ-двигатель можно получить, объединив уравнения усилителя и двигателя. Для этого к уравнениям (1—5) необходимо добавить следующие:

$$e_3 = c_2 \Phi_2 = r_a i_3 + r_k i_k + p L_a i_3 + \sigma_k W_{kp} \Phi'_2 - \sigma_3 W_3 p \Phi_2 + e_\partial + \frac{K_3 \beta_2}{\pi} i_3 . \quad (13)$$

$$j \frac{dn}{dt} = M_\partial - M_c , \quad (14)$$

$$M_\partial = K_i i_3 , \quad (15)$$

где

- $e_\partial = k_e n$  — э. д. с. двигателя,
- $n$  — скорость вращения вала двигателя,
- $J$  — момент инерции якоря двигателя,
- $M_\partial$  — движущий момент двигателя,
- $M_c$  — момент сопротивления,
- $r_a$  — сопротивление якоря двигателя,
- $L_a$  — индуктивность цепи якорей БЭМУ и двигателя,
- $k_i, k_e$  — постоянные.

Эта система уравнений составлена при следующих допущениях:

- 1) магнитная система БЭМУ не насыщена,
- 2) влияние гистерезиса и вихревых токов не учитывается,
- 3) поток двигателя постоянный.

Решая эту систему относительно скорости и тока, получим

$$[(b - c) (\sigma_k p + 1)] n = \frac{R_a a}{k_e} U_y - \frac{M_c R_a (b - c)}{k_i k_e} , \quad (16)$$

$$i_3 = \frac{a}{b - c} U_y - \frac{K_e}{R_a (b - c)} , \quad (17)$$

где

$$T_m = \frac{R_a J}{k_i k_e} \text{ — электромеханическая постоянная времени двигателя,}$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \text{ — электромагнитная постоянная времени цепи якорей,}$$

$$R_a = r_3 + r_a + \frac{\Gamma_k \Gamma_{III}}{R_k} ,$$

$$a = \frac{k_u k_2}{R_a} \left[ 1 + \frac{\sigma_3 W_3 p (1 - \varepsilon_2)}{c_2} \right] ; \quad (18)$$

$$b = [(1 + pT_y)(1 + pT_2 + k''_p) + k_p(1 + pT_y) - T_y k_p p] \left\{ \left( 1 + pT_a + \frac{k_3 \beta_2}{\pi} + \frac{k_3 \beta_2}{\pi} \left[ 1 + \frac{\sigma_3 W_3 p (1 - \varepsilon_2)}{c_2} \right] \right) \right\}; \quad (19)$$

$$C = \frac{T_2 W_3 \beta_2}{W p^2 \pi} (1 + pT_y) p \left\{ \frac{k_2 \Gamma_2}{R_a} \left[ 1 + \frac{\sigma_3 W_3 p (1 - \varepsilon_2)}{c_2} \right] \right\}. \quad (20)$$

Характеристическое уравнение для данного случая будет иметь вид:

$$A_0 p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4 = 0, \quad (21)$$

где

$$A_0 = T_y T_2 T_a T_m,$$

$$A_1 = T_y T_2 T_m + (T_y + T_2 + T_y k''_p) T_a T_m + \\ + \frac{(T_y + T_2 + T_y k''_p) T_m k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{2c_2} - x_2 \frac{T_2 T_m k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{2c_2} + \\ + - \frac{T_y T_2 T_m k_3}{2} x_2,$$

$$A_2 = T_m (T_y + T_2 + T_y k''_p) + (1 + k_p + k''_p) T_a T_m + x T_m \left[ (T_y + T_2 + T_y k''_p) k_3 + \frac{(1 + k''_p + k_p) k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{2c_2} - \frac{T_2 k_3}{2} \right],$$

$$A_3 = T_m (1 + k_p + k''_p) + x_2 T_m (1 + k_p + k''_p) k_3, \quad A_4 = 1.$$

Обычно электромагнитной постоянной времени якорных цепей можно пренебречь. Поэтому при  $T_a = 0$  получим  $A_0 = 0$ ,

$$A'_1 = T_y T_2 T_m, \\ A''_1 = \frac{T_y T_2 T_m k_3}{2} + \frac{(T_y + T_2 + T_y k''_p) T_m k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{2c_2} - \\ - \frac{T_2 T_m k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{2c_2},$$

$$A'_2 = T_m (T_y + T_2 + T_y k''_p),$$

$$A''_2 = T_m [(T_y + T_2 + T_y k''_p) k_3 + \frac{(1 + k_p + k''_p) k_3 \sigma_3 W_3 (1 - \varepsilon_2)}{2c_2} - \\ - \frac{T_2 k_3}{2}],$$

$$A'_3 = T_m (1 + k_p + k''_p),$$

$$A''_3 = T_m (1 + k_p + k''_p) k_3, \quad A_4 = 1.$$

Здесь

$$A_0 = A'_0 + x_2 A''_0, \quad A_2 = A'_2 + x_2 A''_2,$$

$$A_1 = A'_1 + x_2 A''_1, \quad A_3 = A'_3 + x_2 A''_3.$$

Для построения областей устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для системы четвертого порядка, который записывается в виде

$$A_3(A_1A_2 - A_0A_3) - A_1^2A_4 = 0. \quad (22)$$

Задавая степень компенсации  $\varepsilon_2$ , из условия (22) находим значения сдвига коммутационной оси, соответствующие границе устойчивости. На рис. 1 представлены области устойчивой и неустойчивой работы усилителя на двигатель МИ-11Ф.

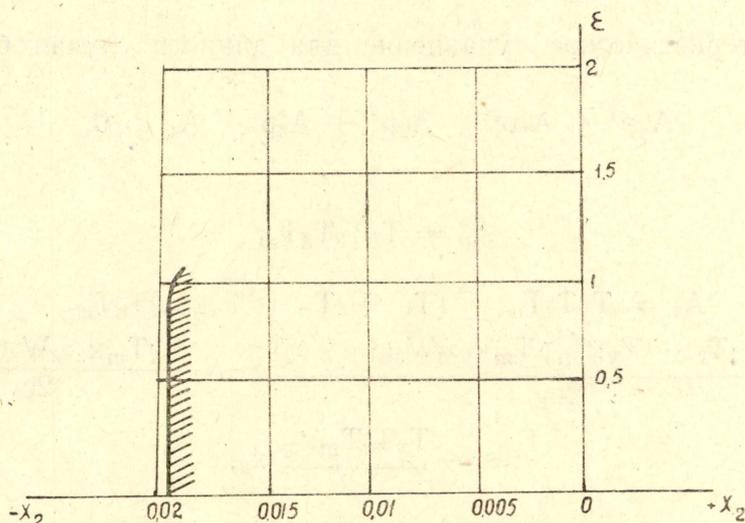


Рис. 1

Из рассмотрения области устойчивости следует, что при сдвиге коммутационной оси по направлению вращения усилитель работает устойчиво, при этом корни характеристического уравнения могут быть либо все вещественные отрицательные, либо один корень вещественный отрицательный, а два — комплексные с отрицательной вещественной частью. В первом случае будет иметь место апериодический переходный процесс, во втором переходный процесс протекает монотонно, но на кривую переходного процесса налагаются затухающие колебания.

Следует отметить, что граница области устойчивости построена из условия независимости угла сдвига коммутационной оси от степени компенсации. На самом деле при одинаковой нагрузке угол сдвига коммутационной оси положительный и тем более, чем меньше недокомпенсация, при перекомпенсации — сдвиг отрицательный. Поэтому при степени компенсации  $\varepsilon_2 \leq 1$  усилитель будет работать устойчиво при любой нагрузке, так как при этом  $x_2 > 0$ . Неустойчивый режим возможен только при перекомпенсации.

Таким образом, проведенное аналитическое исследование показало, что бесколлекторный ЭМУ постоянного тока при работе в нагрузочном режиме будет устойчив при  $\varepsilon_2 \leq 1$  независимо от вида нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Н. Подборский, А. И. Скороспешкин. Вопросы теории бесколлекторного ЭМУ постоянного тока в режиме холостого хода. Известия ТПИ, т. 190, 1968.

2. Д. В. Васильев, В. Г. Чуч. Системы автоматического управления. Изд-во «Высшая школа», М., 1967.