ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

РАСЧЕТ ПОЛЯ В ТРЕХСЛОЙНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛОВ НА КРАЙНИХ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

И. П. ГУК, В. А. ЛУКУТИН, В. С. СОКОЛОВ.

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

Определение потенциала в однослойном диэлектрике кольцевого сечения (длинная труба из диэлектрического материала), при заданном распределении потенциала на окружностях граничных поверхностей, непосредственно сводится к решению внутренней задачи Дирихле для кольца. В литературе [1] этот случай рассмотрен достаточно подробно, решение записано в виде тригонометрического ряда и даны формулы для определения его коэффициентов.

Для двухслойного и трехслойного диэлектрика подобное решение задачи в литературе отсутствует и готовых формул для определения указанных коэффициентов нет, в то время как в связи с конструированием и исследованием электростатических генераторов цилиндрического типа и некоторой другой электрофизической аппаратуры, общее решение этой задачи приобретает определенный практический интерес.

В настоящей работе найдено распределение потенциала в каждом из слоев трехслойного диэлектрика кольцевого сечения в общем случае, т. е. при произвольном соотношении радиусов граничных поверхностей, электрических проницаемостей сред и произвольном виде функций распределения потенциала на крайних граничных поверхностях.

Рассмотрим диэлектрик, представляющий собой длинную трубу, состоящую из трех концентрически расположенных слоев из различных диэлектрических материалов с электрическими проницаемостями ε_1, ε_2, ε_3. Сечение такой трехслойной трубы показано на рис. 1.

Полагаем, что осевая длина трубы достаточно большая сравнительно с внешним диаметром сечения, так что поле можно считать плоскопараллельным, свободные заряды в диэлектриках и на разделяющих их поверхностях отсутствуют, разделение потенциалов по окружностям крайних граничных поверхностей задано некоторыми функциями

$$U_1 = \varphi(r_1;\ \theta) \quad \text{и} \quad U_4 = \varphi(r_4;\ \theta) \tag{1}$$

Потенциал в каждом из слоев диэлектрика определяется уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi^{(i)} = 0, \tag{2}$$

где $i=1,\ 2,\ 3$ — номер слоя.

Решая уравнение (2) методом разделения переменных, получаем выражение для потенциала в виде тригонометрического ряда [1]

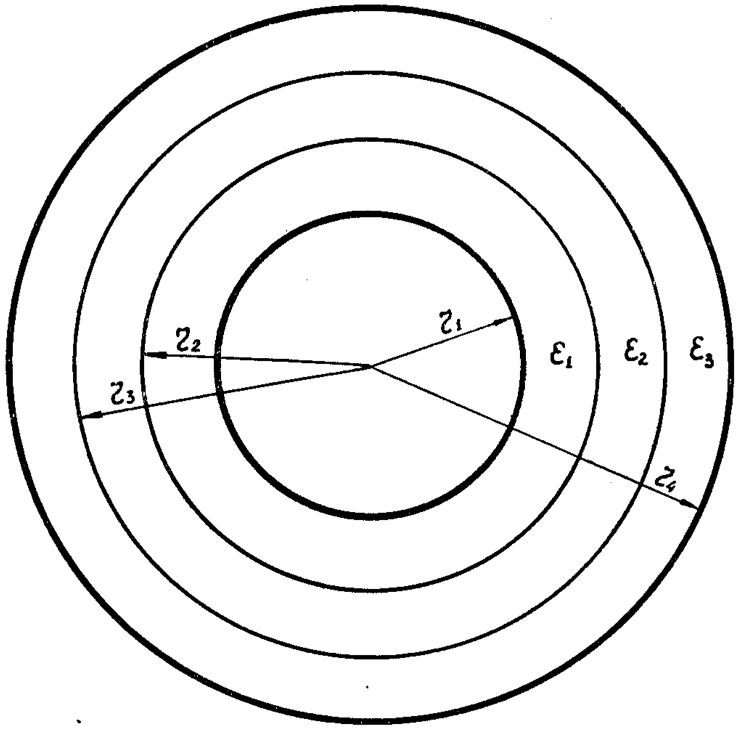

Рис. 1.

$$\varphi^{(i)}(r;\ \theta) = A_0^{(i)}\ln r + B_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(A_k^{(i)}r^k + B_k^{(i)}r^{-k})\cos k\theta + \right.$$

$$\left. + (C_k^{(i)}r^k + D_k^{(i)}r^{-k})\sin k\theta\right]. \qquad (3)$$

Это решение справедливо для любого слоя.

Для нахождения постоянных в уравнении (3) разложим в ряд Фурье граничные функции

$$U_1(\theta) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta + \beta_k^{(1)}\sin k\theta) \qquad (4)$$

$$U_4(\theta) = \frac{\alpha_0^{(4)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(4)}\cos k\theta + \beta_k^{(4)}\sin k\theta). \qquad (5)$$

Приравнивая коэффициенты при косинусах и синусах в уравнении (3), записанном для первого слоя ($i=1$), соответствующим коэффициентам тригонометрического ряда (4), а коэффициенты при косинусах и синусах в уравнении (3), записанном для третьего слоя, соответствующим коэффициентом ряда (5), получим шесть уравнений.

При $r=r_1$ | При $r=r_4$

$$A_0^{(1)}\ln r_1 + B_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}, \qquad (6) \qquad\qquad A_0^{(3)}\ln r_4 + B_0^{(3)} = \frac{\alpha_0^{(4)}}{2}, \qquad (9)$$

$$A_k^{(1)}r_1^k + B_k^{(1)}r_1^{-k} = \alpha_k^{(1)}, \qquad (7) \qquad\qquad A_k^{(3)}r_4^k + B_k^{(3)}r_4^{-k} = \alpha_k^{(4)}, \qquad (10)$$

$$C_k^{(1)}r_1^k + D_k^{(1)}r_1^{-k} = \beta_k^{(1)}. \qquad (8) \qquad\qquad C_k^{(3)}r_4 + D_k^{(3)}r_4^{-k} = \beta_k^{(4)}. \qquad (11)$$

Остальные двенадцать уравнений получаем из условия непрерывности потенциала и равенства нормальных составляющих вектора электрического смещения на границах раздела диэлектриков.

При $r = r_2$

$$\varphi^{(1)} \mid_{r=r_2} = \varphi^{(2)} \mid_{r=r_2}, \tag{12}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}\Bigg|_{r=r_2} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}\Bigg|_{r=r_2} \tag{13}$$

При $r = r_3$

$$\varphi^{(2)} \mid_{r=r_3} = \varphi^{(3)} \mid_{r=r_3}, \tag{14}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}\Bigg|_{r=r_3} = \varepsilon_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial r}\Bigg|_{r=r_3}, \tag{15}$$

Приравнивая почленно коэффициенты при синусах и косинусах, а также негармонические составляющие в уравнениях (12)—(15), получим остальные двенадцать уравнений для определения постоянных. Эти последние уравнения получаются простыми, и мы их здесь не приводим. Решая полученную систему и вводя приведенные электрические проницаемости

$$\varepsilon_{12} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2\kappa},$$

$$\varepsilon_{21} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2\kappa}.$$

$$\varepsilon_{34} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{2\kappa},$$

$$\varepsilon_{43} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{2\kappa},$$

находим следующие значения постоянных при косинусах:

$$A_\kappa^{(1)} = \frac{d_\kappa^{(4)} r_4^{\kappa} 4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \alpha_\kappa^{(1)} r_1^{\kappa}\left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\varepsilon_{43} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_{34}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2\kappa}\right]}{r_4^{2\kappa}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - r_1^{2\kappa}\varepsilon_{21}\varepsilon_{43}},$$

$$A_\kappa^{(3)} = \frac{\alpha_\kappa^{(4)} r_4^{\kappa}\left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon_{12} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\varepsilon_{21}\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^{2\kappa}\right] - \alpha_\kappa^{(1)} r_1^{\kappa} 4\varepsilon_1\varepsilon_2}{r_4^{2\kappa}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - r_1^{2\kappa}\varepsilon_{21}\varepsilon_{43}}.$$

Остальные постоянные при косинусах выражены через $A_\kappa^{(1)}$ и $A_\kappa^{(3)}$.

$$B_\kappa^{(1)} = \alpha_\kappa^{(1)} r_1^{\kappa} - A_\kappa^{(1)} r_1^{2\kappa}; \qquad B_\kappa^{(3)} = \alpha_\kappa^{(4)} r_4^{\kappa} = A_\kappa^{(3)} r_4^{2\kappa};$$

$$A_\kappa^{(2)} = \frac{r_2^{-2\kappa}}{2\varepsilon_2}\left[A_\kappa^{(1)} r_2^{2\kappa}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + B_\kappa^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right];$$

$$B_\kappa^{(2)} = \frac{1}{2\varepsilon_2}\left[A_\kappa^{(1)} r_2^{2\kappa}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + B_\kappa^{(1)}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\right].$$

Постоянные при негармонических составляющих записываются в следующем виде:

$$A_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(4)} - \alpha_0^{(1)}}{2\left[\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right]};$$

$$A_0^{(2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}A_0^{(1)}; \qquad A_0^{(3)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}A_0^{(1)}. \qquad B_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} - A_0^{(1)}\ln r_1;$$

$$B_0^{(2)} = A_0^{(1)}\left(\ln\frac{r_2}{r_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln r_2\right) + \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}; \quad B_0^{(3)} = \frac{\alpha_0^{(4)}}{2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}A_0^{(1)}\ln r_4.$$

Постоянные при синусах $C_\kappa^{(i)}$ и $D_\kappa^{(i)}$ записывать отдельно нецелесообразно, так как они очень просто получаются из соответствующих выражений для постоянных при косинусах $A_\kappa^{(i)}$ и $B_\kappa^{(i)}$. Чтобы записать формулу для $C_\kappa^{(i)}$, достаточно в выражении постоянной $A_\kappa^{(i)}$ (относящейся к тому же i-му слою) заменить $\alpha_\kappa^{(1)}$ на $\beta_\kappa^{(1)}$, а $\alpha_\kappa^{(4)}$ на $\beta_\kappa^{(4)}$.

Совершенно аналогично из постоянных $B_к^{(i)}$ получаются $D_к^{(i)}$.

Для двухслойного диэлектрика потенциал в каждом слое также определяется выражением (3) $(i=1, 2)$.

Для определения постоянных в этом случае можно воспользоваться записанными выше формулами, заменив во всех выражениях r_4 на r_3 и приравняв ε_3 и ε_2.

Необходимо отметить, что быстрота сходимости ряда (3), определяющего потенциал, зависит в основном от формы кривых, задающих распределение потенциала на крайних границах. Полученные формулы достаточно просты для расчета полей с применением математических машин. Они могут быть использованы также для оценки точности приближенных методов расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А. В. Конторович, В. И. Крылов.** Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.

2. **В. И. Смирнов.** Курс высшей математики. М., т. 11, 1953.