ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПОЛЯ РОТОРА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

И. П. ГУК, В. А. ЛУКУТИН.

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

В предыдущей статье предлагается раздельное рассмотрение поля статора и ротора электростатической машины и дается расчет электрического поля статора. Ниже приводится возможный вариант определения потенциальной функции поля ротора. Прежде чем приступить к рассмотрению поля, следует коротко пояснить конструкцию цилиндрической электростатической машины (ЭСМ), подробное описание которой дано, например, в [1].

В полости, образованной двумя концентрическими цилиндрами и заполненной определенным газом, помещается ротор. Ротор представляет собой цилиндр из диэлектрика, в котором в осевом направлении закреплены стержни (транспортеры) из проводящего материала. Таких стержней, удаленных на равные расстояния друг от друга, может быть 2 m штук, причем транспортеры в области от $0 \leqslant \theta < \pi$ несут заряды ql, а транспортеры, помещенные в области $\pi \leqslant \theta < 2\pi$, имеют заряды q′l, где l — длина стержней.

Если пренебречь краевым эффектом на торцах ротора, то поле, созданное заряженными транспортерами, можно рассматривать как двухмерное.

Таким образом, задача сводится к отысканию потенциальной функции в кольцевой области с многослойным диэлектриком. В рассматриваемой области в общем случае имеется три диэлектрические среды с проницаемостями ε_1, ε_2, ε_3, границы раздела которых имеют форму окружностей с радиусами r_2 и r_3.

Крайние окружности ($r=r_1$ и $r=r_4$) имеют нулевой потенциал.

Если для этой области определить нормированную функцию Грина G (r; θ), то распределение потенциала от заряда q, расположенного в области, может быть найдено по формуле

$$\varphi(r;\ \theta) = qG(r;\ \theta). \qquad (1)$$

Заряженную нить будем рассматривать как предел равномерно заряженной по объему призмы, сечение которой в плоскости чертежа ограничено двумя дугами окружностей радиуса r_0 и $(r_0+\delta)$ и двумя радиусами $\theta = \pm\Delta$, где δ и Δ — весьма малые величины, в пределе стремящиеся к нулю. Объемная плотность равномерно распределенного внутри призмы заряда определяется соотношением

$$\rho_0 = \frac{q}{2r_0\Delta\sigma}\,. \qquad (2)$$

Согласно [2] в области, заполненной средой с $\varepsilon=\varepsilon_i$, потенциал должен удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi^{(i)} = -\frac{\rho^{(i)}}{\varepsilon_i} \equiv f^{(i)}(r) \qquad (3)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3),$$

а на границе двух сред должны выполняться условия:

$$\varphi^{(1)}\,|_{\,r=r_2} = \varphi^{(2)}\,|_{\,r=r_2};\quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}\bigg|_{r=r_2} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=r_2}, \qquad (4)$$

$$\varphi^{(2)}\,|_{\,r=r_3} = \varphi^{(3)}\,|_{\,r=r_3};\quad \varepsilon_2\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=r_3} = \varepsilon_3\frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial r}\bigg|_{r=r_3}. \qquad (5)$$

Используя метод частных решений [2], запишем решение уравнения (3) в цилиндрической системе координат в виде ряда

$$\varphi^{(i)} = \frac{1}{2}a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^{(i)}\cos k\theta + b_k^{(i)}\sin k\theta\right), \qquad (6)$$

где коэффициенты $b_k^{(i)}=0$, так как распределение потенциальной функции симметрично относительно диаметра $\theta=0$, а коэффициенты $a_0^{(i)}$ и $a_k^{(i)}$ имеют следующий вид в первой и третьей областях ($f_k^{(1)}= =f_k^{(3)}=0$):

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(1)} &= A_0^{(1)}\ln r + B_0^{(1)} \\ a_k^{(1)} &= A_k^{(1)}r^k + B_k^{(1)}r^{-k} \end{aligned}\right\}\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(3)} &= A_0^{(3)}\ln r + B_0^{(3)} \\ a_k^{(3)} &= A_k^{(3)}r^k + B_k^{(3)}r^{-k} \end{aligned}\right\}\ r_3 \leqslant r \leqslant r_4. \qquad (8)$$

Для второй области ($r_2\leqslant r\leqslant r_3$)

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(2)} &= A_0^{(2)}\ln r + B_0^{(2)} + \int_{r_2}^{r} f_0^{(2)}(\zeta)\zeta\ln\frac{r}{\zeta}d\zeta, \\ a_k^{(2)} &= A_k^{(2)}r^k + B_k^{(2)}r^{-k} + \int_{r_2}^{r}\frac{1}{2k}f_k^{(2)}(\zeta)\zeta\left[\left(\frac{r}{\zeta}\right)^k - \left(\frac{\zeta}{r}\right)^k\right]d\zeta, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где интегралы в пределе ($\delta\to0,\ \Delta\to0$) от любой функции $F(\zeta)$, конечной и непрерывной в интервале $r_2\leqslant\zeta\leqslant r_3$, определятся следующим образом [2]:

$$\lim_{\substack{\delta\to0\\ \Delta\to0}}\int_{r_2}^{r} f_k^{(2)}(\zeta)F(\zeta)d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{при } r_2\leqslant r < r_0 \\ -\dfrac{q}{\pi\varepsilon_2 r_0}F(r_0), & \text{при } r_0\leqslant r\leqslant r_3 \end{cases} \qquad (10)$$

где

$$f_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^{(2)}\cos k\theta d\theta.$$

Для определения постоянных $A_0^{(i)}$, $B_0^{(i)}$, $A_k^{(i)}$ и $B_k^{(i)}$ запишем систему уравнений в соответствии с (4), (5) и условием равенства нулю потенциала при $r=r_1$, $r=r_4$ и, помня о единственности разложения функции в ряд Фурье, приравниваем коэффициенты у соответствующих $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$:

$$\left.\begin{aligned}
&A_o^{(1)}\ln r_1 + B_o^{(1)} = 0;\\
&A_o^{(1)}\ln r_2 + B_o^{(1)} = A_o^{(2)}\ln r_2 + B_o^{(2)};\\
&A_o^{(1)}\varepsilon_1 = A_o^{(2)}\varepsilon_2;\\
&A_o^{(2)}\ln r_3 + B_o^{(2)} - \frac{q}{\pi\varepsilon_2}\ln\frac{r_3}{r_o} = A_o^{(3)}\ln r_3 + B_o^{(3)};\\
&A_o^{(2)}\frac{\varepsilon_2}{r_3} - \frac{q}{\pi} = A_o^{(3)}\frac{\varepsilon_3}{r_3};\\
&A_o^{(3)}\ln r_4 + B_o^{(3)} = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_к^{(1)}r_1^{к} + B_к^{(1)}r_1^{-к} = 0;\\
&A_к^{(1)}r_2^{к} + B_к^{(1)}r_2^{-к} = A_к^{(2)}r_2^{к} + B_к^{(2)}r_2^{-к};\\
&(A_к^{(1)}r_2^{-к-1}k - B^{(1)}{}_к r_2^{-к-1}k)\varepsilon_1 = (A_к^{(2)}r_2^{к-1}k - B_к^{(2)}r_2^{-к-1}k)\varepsilon_2;\\
&A_к^{(2)}r_3^{к} + B_к^{(2)}r_3^{-к} - \frac{q}{\pi\varepsilon_2 k}\,\mathrm{sh}\left(k\ln\frac{r_3}{r_o}\right) = A_к^{(3)}r_3^{к} + B_к^{(3)}r_3^{-к};\\
&\left[A_к^{(2)}r_3^{к-1}k - B_к^{(2)}r_3^{-к-1}k - \frac{q}{\pi\varepsilon_2 r_3}\,\mathrm{ch}\left(k\ln\frac{r_3}{r_o}\right)\right]\varepsilon_2 = (A_к^{(3)}r_3^{к-1}k -\\
&\qquad B_к^{(3)}r_3^{-к-1}k)\varepsilon_3;\\
&A_к^{(3)}r_4^{к} + B_к^{(3)}r_4^{-к} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Решение системы уравнений (11) относительно $A_0^{(i)}$ и $B_0^{(i)}$ дает:

$$A_o^{(1)} = \frac{q}{\pi\varepsilon_1}\Lambda_o, \quad (13) \qquad B_o^{(1)} = -\ln r_1 A_o^{(1)}, \quad (14)$$

$$A_o^{(2)} = \frac{q}{\pi\varepsilon_2}\Lambda_o, \quad (15) \qquad B_o^{(2)} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\ln\frac{r_2}{r_1} - \ln r_2\Big)A_o^{(2)}) \quad (16)$$

$$A_o^{(3)} = \frac{q}{\pi\varepsilon_2}(\Lambda_o - 1), \quad (17) \qquad B_o^{(3)} = -\ln r_4 A_o^{(3)}, \quad (18)$$

где

$$\Lambda_o = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\ln\frac{r_4}{r_3} + \ln\frac{r_3}{r_o}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\ln\frac{r_4}{r_3} + \ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

А решая систему уравнений (12) и вводя обозначения

$$\varepsilon_{12} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2к},$$

$$\varepsilon_{21} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2к},$$

$$\varepsilon_{34} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{2к},$$

$$\varepsilon_{43} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{2к},$$

получаем, что

$$A_к^{(1)} = \frac{q}{\pi к r_o^к} \; \frac{r_4^{2к}\varepsilon_{34} - r_o^{2к}\varepsilon_{48}}{r_4^{2к}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - r_1^{2к}\varepsilon_{21}\varepsilon_{43}}, \qquad (19)$$

$$B_к^{(1)} = - r_1^{2к} A_к^{(1)}, \qquad (20)$$

$$A_к^{(2)} = \frac{\varepsilon_{12}}{2\varepsilon_2} A_к^{(1)}, \qquad (21)$$

$$B_к^{(2)} = - \frac{\varepsilon_{21}}{2\varepsilon_2} r_1^{2к} A_к^{(1)}, \qquad (22)$$

$$A_к^{(3)} = \frac{q}{\pi k r_o^к} \; \frac{r_1^{2к}\varepsilon_{21} - r_o^{2к}\varepsilon_{12}}{r_4^{2к}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - r_1^{2к}\varepsilon_{21}\varepsilon_{43}} \qquad (23)$$

$$B_к^{(3)} = - r_4^{2к} A_к^{(3)}. \qquad (24)$$

Теперь, подставляя значения постоянных в уравнение (6), получим выражение для нормированной функции Грина:

$$G(r;\theta) = \begin{cases} A_o^{(1)} \ln \dfrac{r}{r_1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_к^{(1)} \frac{r^{2к} - r_1^{2к}}{r^к} \cos k\theta \\ \qquad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2), \\ A_o^{(2)} \left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \dfrac{r_2}{r_1} - \ln \dfrac{r}{r_2} \right) - \upsilon \dfrac{1}{\pi\varepsilon_2} \ln \dfrac{r}{r_o} + \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_к^{(2)} r^к + B_к^{(2)} r^{-к} - \frac{\upsilon sh \left[k \ln \dfrac{r}{r_o} \right]}{2\pi\varepsilon_2 k r_o^к} \right) \cos k\theta \\ \qquad (r_2 \leqslant r \leqslant r_3), \\ A_o^{(3)} \ln \dfrac{r}{r_4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(3)} \frac{r^{2к} - r_4^{2к}}{r^к} \cos k\theta \\ \qquad (r_3 \leqslant r \leqslant r_4), \end{cases} \qquad (25)$$

$$где\ \nu = \begin{cases} 0 & при\ r_2 \leqslant r < r_0, \\ 1 & при\ r_0 \leqslant r \leqslant r_3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что выражение (25) имеет свойства, которыми должна обладать функция Грина. Внутри кольца она имеет единственную особенность $r = r_0$ и $\theta = 0$ и равна нулю на внутренней и внешней окружностях.

Применим теперь приведенное выражение (25) к расчету электрического поля электростатической машины с транспортерами-проводниками, устройство которой мы пояснили выше. Поперечное сечение генератора данного типа при кондукционной схеме возбуждения в режиме короткого замыкания будет соответствовать рис. 1, в котором нужно взять не один, а 2 m заряженных проводников, причем координаты n-го транспортера будут

$$r = r_o \ и\ \theta = \frac{n-1}{m} \pi.$$

Распространим теперь соотношение (25) на последовательность 2 m линейных зарядов, помня, что транспортеры от первого до m-го несут

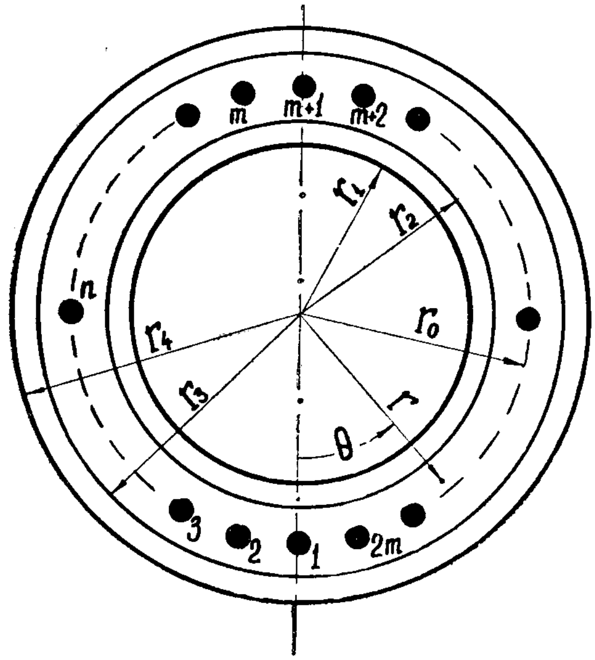

Рис. 1.

заряд q, а остальные — q^1. И пользуясь методом наложения, получим формулу для определения потенциала

$$\varphi(r;\ \theta) = q\sum_{n=1}^{m} G_n(r;\ \theta) + d^1 \sum_{n=m+1}^{2m} G_n(r;\ \theta), \tag{26}$$

где G_n (r; θ) — нормированная функция Грина для n-го транспортера, определенная по выражению (25), в котором нужно θ заменить на $(\theta - \frac{n-1}{m}\pi)$. Используя граничные условия в режиме короткого замыкания

$$\varphi\,(r_0;\ \pi) = 0 \ \text{ и } \ \varphi\,(r_0;\ 0) = U_в,$$

(где $U_в$ — напряжение источника возбуждения), получим, что потенциал в любой точке поля

$$\varphi(r;\ \theta) = \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{2m} G_n(r;\ \theta)}{\sum\limits_{n=1}^{2m} G_n(r_0;0)} + \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} G_n(r;\ \theta) - \sum\limits_{n=m+1}^{2m} G_n(r;\ \theta)}{G_1(r_0;\ 0)}\right]\frac{U_в}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **В. И. Левитов, А. Г. Ляпин.** Электростатические генераторы с жестким ротором. ч. I, М., 1963.

2. **Г. А. Гринберг.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. §§ 15, 18, М., 1948.