ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 192 1975

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ТИПА МЕТОДОМ МОМЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Пусть задана передаточная функция некоторой линейной динамической системы

$$W(p) = \frac{H(p)}{D(p)}, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H(p) &= \alpha_{m+1} p^m + \alpha_m p^{m-1} + \ldots + \alpha_2 p + \alpha_1, \\ D(p) &= p^n + \beta_n p^{n-1} + \ldots + \beta_2 p + \beta_1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем $m < n$. Будем предполагать, что нули и полюса функции $W(p)$, то есть корни уравнений,

$$H(p) = 0 \tag{3}$$

и

$$Д(p) = 0, \tag{4}$$

простые и лежат в левой полуплоскости. Иначе говоря, передаточная функция (1) является минимально-фазовой. Соответствующая весовая функция будет, очевидно, иметь вид

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t}, \tag{5}$$

где c_i есть вычет функции $W(p)$ в простом полюсе $p = p_i$, то есть

$$c_i = \operatorname*{Res}_{p=p_i} \frac{H(p)}{D(p)} = \frac{H(p_i)}{D'(p_i)}, \quad (i = 1, 2 \ldots).$$

Реакция системы на воздействие $F(t)$ может быть найдена с помощью интеграла свертки

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) F(\tau)\, d\tau = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^t e^{p_i (t-\tau)} F(\tau)\, d\tau.$$

Рассмотрим численный метод определения нулей и полюсов передаточной функции (1), основанной на построении последовательности вещественных чисел, имеющих смысл моментов весовой функции (5). Задача сводится к определению корней уравнений (3) и (4).

§ 1. Определение наименьшего по модулю корня

Пронумеруем корни уравнения (4) в порядке возрастания их модулей

$$|p_1| \leqslant |p_2| \leqslant |p_3| \leqslant \ldots \leqslant |p_n| \tag{1-1}$$

и рассмотрим последовательность моментов весовой функции

$$m_\kappa = \int_0^\infty t^\kappa h(t)\,\mathrm{d}t, \; (\kappa = 0, 1, 2 \ldots). \tag{1-2}$$

Учитывая (5), получим

$$m_\kappa = (-1)^\kappa \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\kappa!}{p_i^{\kappa+1}}. \tag{1-3}$$

Предположим, что наименьший по модулю корень является вещественным. Согласно (1-1) это корень p_1. Очевидно, с ростом κ первый член в (1-3) все более будет преобладать над остальными и, при достаточно большом значении κ, можно приближенно считать

$$\frac{m_\kappa}{\kappa!} \approx \frac{c_1}{p_1^{\kappa+1}} (-1)^\kappa,$$

а также

$$\frac{m_{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} \approx \frac{c_1}{p_1^{\kappa+2}} (-1)^{\kappa+1}.$$

Поделив одно на другое, получим

$$|p_1| \approx (\kappa+1) \frac{|m_\kappa|}{|m_{\kappa+1}|}. \tag{1-4}$$

Чем больше κ, тем точнее формула (1-4), так как в пределе

$$|p_1| = \lim_{\kappa\to\infty} (\kappa+1) \frac{|m_\kappa|}{|m_{\kappa+1}|}.$$

Предположим теперь, что корни p_1 и p_2 образуют комплексно-сопряженную пару с наименьшим модулем.
Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\alpha_1 + j\omega_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \omega_1^2}\, e^{j\varphi_1} = |p_1|\, e^{j\varphi_1}, \\ p_2 &= -\alpha_1 - j\omega_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \omega_1^2}\, e^{-j\varphi_1} = |p_1|\, e^{-j\varphi_1} \\ \varphi_1 &= \arccos \frac{-\alpha}{|p_1|}, \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

При достаточно большом κ получим следующие приближенные соотношения [$(-1)^\kappa$ можно опустить]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} &\approx \frac{2}{|p_1|_\kappa} [c_1' \cos\kappa\varphi_1 + c_1'' \sin\kappa\varphi_1], \\ \frac{m_\kappa}{\kappa!} &\approx \frac{2}{|p_1|^{\kappa+1}} [c_1' \cos(\kappa+1)\varphi_1 + c_1'' \sin(\kappa+1)\varphi_1], \\ \frac{m_{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} &\approx \frac{2}{|p_1|^{\kappa+2}} [c_1' \cos(\kappa+2)\varphi_1 + c_1'' \sin(\kappa+2)\varphi_1], \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

где

$$c_1' = \mathrm{Re}\; c_1 = \mathrm{Re}\, c_2; \quad c_1'' = \mathrm{Im}\, c_1 = -\mathrm{Im}\, c_2$$

$$c_1 = c_1' + jc_1'' \text{ и } c_2 = c_1' - jc_1''.$$

Если воспользоваться тригонометрическими тождествами для синуса и косинуса суммы двух углов, то мы получим возможность исключить из соотношений (1-6) выражения вида

$$c_1' \cos \kappa\varphi_1 + c_1'' \sin \kappa\varphi_1 \text{ и } c_1'' \cos \kappa\varphi_1 - c_1' \sin \kappa\varphi_1.$$

В результате, после упрощений, будем иметь

$$\frac{m_{\kappa+1}}{\kappa(\kappa+1)} + \frac{m_\kappa}{\kappa}\frac{2|\alpha_1|}{|p_1|^2} + m_{\kappa-1}\frac{1}{|p_1|^2} \approx 0,$$

а также

$$\frac{m_{\kappa+2}}{(\kappa+1)(\kappa+2)} + \frac{m_{\kappa+1}}{\kappa+1}\frac{2|\alpha_1|}{|p_1|^2} + m_\kappa\frac{1}{|p_1|^2} \approx 0.$$

Решая совместно, получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &\approx \frac{\kappa+1}{2}\frac{|\kappa m_{\kappa+2}\cdot m_{\kappa-1} - (\kappa+2)\, m_{\kappa+1}\cdot m_\kappa|}{|(\kappa+2)\, m_{\kappa+1}^2 - (\kappa+1)\, m_\kappa\cdot m_{\kappa+2}|}, \\ |p_1|^2 = \alpha_1^2 + \omega_1^2 &\approx \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)|(\kappa+1)\, m_\kappa^2 - \kappa m_{\kappa+1}\cdot m_{\kappa-1}|}{|(\kappa+2)\, m_{\kappa+1}^2 - (\kappa+1)\, m_\kappa\cdot m_{\kappa+2}|}. \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}7)$$

Таким образом, комплексно-сопряженные корни с наименьшим модулем также выражаются через моменты весовой функции. Рассмотрим методику определения моментов. Поскольку корни уравнения (4) совершенно не зависят от вида полинома $H(p)$, мы можем положить $H(p) = 1$ и рассмотреть некоторую расчетную передаточную функцию

$$W_1(p) = \frac{1}{D(p)}, \qquad (1\text{-}8)$$

имеющую такие же полюса, что и передаточная функция (1). Передаточной функции (1-8) соответствует временной оригинал $y(t)$, то есть

$$W_1(p) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-pt} dt. \qquad (1\text{-}9)$$

Продифференцируем (1-9) κ раз по p и положим $p = 0$, тогда, учитывая (1-3), можем написать

$$\left.\frac{d^\kappa W_1(p)}{dp^\kappa}\right|_{p=0} = (-1)^\kappa \int_0^\infty t^\kappa y(t)\, \mathrm{dt} = (-1)^\kappa m_\kappa$$

или

$$m_\kappa = (-1)^\kappa W_1^{(\kappa)}(0). \qquad (1\text{-}10)$$

Заметим, что мы оставили прежние обозначения для моментов функции $y(t)$. Нам удобно ввести новую характеристику M_κ согласно формуле

$$W_1^{(\kappa)}(0) = (-1)^\kappa \kappa! M_\kappa, \qquad (1\text{-}11)$$

тогда (1-10) можно записать в виде

$$m_\kappa = \kappa! M_\kappa. \qquad (1\text{-}12)$$

Из (1-8) следует

$$W_1(p)\cdot D(p) = 1.$$

Применяя правило Лейбница, получим

$$\frac{d^\kappa}{dp^\kappa}[W_1(p)\cdot D(p)]_{p=0} = \sum_{\nu=0}^{\kappa}\binom{\nu}{\kappa} W_1^{(\kappa-\nu)}(0)\, D^{(\nu)}(0) = \begin{matrix} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{matrix}. \qquad (1\text{-}13)$$

Если учесть (1-11), а также равенства

$$\binom{\nu}{\kappa} = c_\kappa^\nu = \frac{\kappa!}{\nu!\,(\kappa-\nu)!},$$

$$D^{(\nu)}(0) = \nu!\beta_{\nu+1},$$

то будем иметь систему

$$\sum_{\nu=0}^{\kappa}(-1)^{\kappa-\nu}M_{\kappa-\nu}\beta_{\nu+1} = \begin{matrix} 1 & \kappa=0 \\ 0 & \kappa=1,\,2,\,3,\,\ldots \end{matrix} \tag{1-14}$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned} M_0\beta_1 &= 1 \\ -M_1\beta_1 + M_0\beta_2 &= 0 \\ M_2\beta_1 - M_1\beta_2 + M_0\beta_3 &= 0 \\ -M_3\beta_1 + M_2\beta_2 - M_1\beta_3 + M_0\beta_4 &= 0 \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\, & \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

Система (1-14) легко решается. Последовательно можем найти

$$\left.\begin{aligned} & M_0 = \frac{1}{\beta_1} \\ & M_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1^2} = \frac{1}{\beta_1}M_0\beta_2 \\ & M_2 = \frac{\beta_2^2}{\beta_1^3} - \frac{\beta_3}{\beta_1^2} = -\frac{1}{\beta_1}(M_0\beta_3 - M_2\beta_2) \\ & M_3 = \frac{1}{\beta_1}(M_0\beta_4 - M_1\beta_3 + M_0\beta_2) \\ & -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

$$M_\kappa = (-1)^{\kappa+1}\frac{1}{\beta_1}\sum_{\nu=0}^{\kappa-1}(-1)^\nu M_\nu\beta_{\kappa-\nu+1} \quad (\kappa = 1,\,2,\,\ldots). \tag{1-17}$$

Заметим, что при $\kappa > n$ (n — степень полинома $D(p)$ первые члены в (1-17), для которых $\nu < \kappa - n$, обратятся в нуль. Кроме того, следует иметь в виду, что $\beta_{n+1} = 1$.

Мы получили практически весьма удобный алгоритм для последовательного определения величин M_k, по которым легко могут быть найдены моменты m_k. Последние, однако, можно не вычислять, так как расчетные формулы (1-4) и (1-7) в результате замены (1-12) приобретают более удобный вид:

$$\left.\begin{aligned} & |p_1| \approx (\kappa+1)\frac{|m_\kappa|}{|m_{\kappa+1}|} = \frac{m_\kappa}{m_{\kappa+1}}, \\ & \alpha_1 \approx \frac{1}{2}\,\frac{|M_{\kappa+2}\cdot M_{\kappa-1} - M_{\kappa+1}\cdot M_\kappa|}{|M_{\kappa+1}^2 - M_\kappa\cdot M_{\kappa+2}|}, \\ & |p_1|^2 = \alpha_1^2 + \omega_1^2 \approx \frac{|M_\kappa^2 - M_{\kappa+1}\cdot M_{\kappa-1}|}{|M_{\kappa+1}^2 - M_\kappa\cdot M_{\kappa+2}|}. \end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

Таким образом, последовательность вещественных величин M_κ ($\kappa = 0,\,1,\,2,\,\ldots$), построенная по рекуррентной формуле (1-17), решает задачу определения наименьшего по модулю простого корня как вещественного, так и комплексного. Но прежде чем применять формулы (1-18), необходимо знать тип корня. Оказывается, характер последовательности $M_к$ ($к = 0, 1, 2, ...$) позволяет судить об этом. Можно строго показать, что если указанная последовательность монотонно изменяется без перемены знака, то наименьший по модулю корень — вещественный. При комплексном корне последовательность имеет колебательный характер, причем иногда знак меняется довольно беспорядочно. Возникает еще один вопрос: какое значение $к$ следует брать в формулах (1-18)?

Приближенное значение корня начинает выделяться уже при $к = 3$-4. С увеличением $к$ точность растет, если, конечно, последующие члены вычислять с большой точностью, например, на арифмометре. При расчетах на обычной линейке значение $к$ больше, чем 9-10, брать нецелесообразно, так как накапливающиеся ошибки округления не позволят найти более точное значение корня.

Практически следует поступить так. Для трех последующих значений $к$ (например, для $к=4, 5, 6$ или $к=5, 6, 7$) определяются три значения корня. Если они мало отличаются друг от друга и разность между ними (по вещественной и мнимой частям) меняет знак, то следует брать значение, соответствующее большему значению $к$, или их среднее арифметическое. Если же разность между ними велика и одного знака, то это является признаком кратного корня. Приближенное значение его может быть определено при дальнейшем увеличении $к$.

Совершенно аналогично может быть найден наименьший по модулю корень уравнения (3), то есть наименьший по модулю нуль передаточной функции (1). Для построения последовательности $\bar{M}_к$ ($к = 1, 2, ...$) в этом случае необходимо в рекуррентной формуле (1-17) заменить коэффициенты β соответствующими коэффициентами α и учесть, что $\alpha_{m+1} \neq 1$.

§ 2. Определение наибольшего по модулю корня и других корней

В уравнении (4) сделаем подстановку

$$p = \frac{1}{z} \tag{2-1}$$

и приведем его к виду

$$D_1(z) = \beta_1 z^n + \beta_2 z^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} z^2 + \beta_n z + 1 = 0. \tag{2-2}$$

Пусть z_1 есть наименьший по модулю корень этого уравнения, тогда наибольший по модулю корень p_n исходного уравнения (4) будет, очевидно, равен

$$p_n = \frac{1}{z_1}. \tag{2-3}$$

Таким образом, задача сводится к определению наименьшего по модулю корня z_1 уравнения (2-2), что может быть сделано по рассмотренной уже методике.

Теперь мы должны иметь в виду, что порядок следования коэффициентов уравнения (2-2) изменен на обратный. На месте коэффициента β_m в уравнении (4) теперь стоит коэффициент β_{n-m+2}, поэтому в рекуррентной формуле (1-17) мы должны произвести замену $\beta_{к-\nu+1} \to \beta_{n-к+\nu+1}$, в результате будем иметь

$$N_к = (-1)^{к+1} \sum_{\nu=0}^{к-1} (-1)^{\nu} N_{\nu} \beta_{n-к+\nu+1} \quad (к = 1, 2, \ldots). \tag{2-4}$$

Чтобы исключить путаницу, вместо $M_к$ ввели обозначение $N_к$. Запишем (2-4) в развернутой форме:

$$\left.\begin{aligned} N_0 &= 1=\beta_{n+1} \\ N_1 &= N_0\beta_n = \beta_n \\ N_2 &= -N_0\beta_{n-1}+N_1\beta_n = \beta_n^2-\beta_{n-1} \\ N_3 &= N_0\beta_{n-2}-N_1\beta_{n-1}+N_2\beta_n \\ &- - - - - - - - - - - . \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}5)$$

Если z_1 — вещественный корень, то

$$|p_n| = \frac{1}{|z_1|} \approx \frac{N_{к+1}}{N_к}. \qquad (2\text{-}6)$$

Если же z_1 и z_2 образуют комплексно-сопряженную пару ($z_1 = -a_1 + jb_1$ и $z_2 = -a_1 - jb_1$) с наименьшим модулем, то модуль корня p_n и его вещественная часть определятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a_1}{|z_1|^2} \approx \frac{1}{2}\,\frac{|N_{к+2}N_{к-1}-N_{к+1}\cdot N_к|}{|N_к^2-N_{к+1}\cdot N_{к-1}|}, \\ |p_n|^2 &= \alpha_n^2+\omega_n^2 = \frac{1}{a_1^2+b_1^2} \approx \frac{|N_{к+1}^2-N_к\cdot N_{к+2}|}{|N_к^2-N_{к+1}N_{к-1}|}. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}7)$$

Таким образом, построив с помощью рекуррентной формулы (2-4) последовательность величин $N_к$ ($к = 0, 1, 2, \ldots$), мы можем найти наибольший по модулю корень P_n исходного уравнения (4), причем все замечания, сделанные ранее, полностью сохраняют силу.

Если один из корней алгебраического уравнения n-й степени будет определен, то задача сводится к решению уравнения степени $n = 1$. Поэтому наиболее благоприятным случаем с точки зрения трудоемкости определения других корней будет случай, когда первоначально найденный корень окажется комплексным. В этом случае мы можем понизить степень уравнения на две единицы, так как при вещественных коэффициентах уравнения комплексные корни всегда образуют сопряженные пары. Если же и наибольший по модулю корень окажется комплексным, то степень уравнения может быть понижена на четыре единицы. Случай вещественных корней является наиболее неблагоприятным.

Построив уравнение пониженной степени, мы можем снова применить наш алгоритм и найти часть корней, затем, если это необходимо, построить уравнение с еще более низкой степенью и снова найти корни по описанной методике и т. д. Таким путем мы можем определить все корни. Естественно, трудоемкость возрастет с ростом степени уравнения и, кроме того, точность определения последующих корней будет зависеть от точности первоначально найденных корней.

Для реализации описанной методики целесообразно воспользоваться формулами Ньютона, связывающими коэффициенты уравнения со степенными суммами корней [1, 2].

Обозначим

$$S_к = P^{\overset{к}{1}} + P_2^к + \ldots + P_n^к = \sum_{i=1}^{n} P_i^к \quad (к = 1, 2 \ldots), \qquad (2\text{-}8)$$

тогда

$$S_к = -к\beta_{n-к+1} - \sum_{i=1}^{к-1} \beta_{n-i+1}S_{к-i} \ (к = 1, 2 \ldots). \qquad (2\text{-}9)$$

Рекуррентные формулы (2-9) и называются формулами Ньютона. Для нескольких первых значений κ получим

$$\left.\begin{aligned} &S_1 = -\beta_n \\ &S_2 = -2\beta_{n-1} - \beta_n S_1 = -2\beta_{n-1} + \beta_n^2 \\ &S_3 = -3\beta_{n-2} - \beta_{n-1}S_1 - \beta_n S_2 = 3(\beta_n\beta_{n-1} - \beta_{n-2}) - \beta_n^3 \\ &S_4 = -4\beta_{n-3} - \beta_{n-2}S_1 - \beta_{n-1}S_2 - \beta_n S_3 \\ &\text{— — — — — — — — — — — — — — — —.} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

Кроме (2-8) отметим еще формулу, связывающую произведение корней и свободный член уравнения (4) (теорема Виета)

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i = (-1)^n \beta_1. \tag{2-11}$$

Рассмотрим теперь методику определения корней уравнения (4) для $n = 3, 4, 5, 6$.

1. Уравнение третьей степени

Возможны два случая:

а) Наименьший по модулю корень образует комплексно-сопряженную пару ($p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$ и $p_2 = -\alpha_1 - j\omega_1$).

Из (2-8) следует ($\kappa = 1$), что единственный вещественный корень будет равен

$$p_3 = s_1 - (p_1 + p_2) = -\beta_3 + 2\alpha_1. \tag{2-12}$$

Из (2-11) можем найти

$$p_3 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \omega_1^2}. \tag{2-13}$$

Одна из этих формул может служить для контроля вычислений.

б) Наименьший по модулю корень оказался вещественным. Из (2-8) находим

$$p_2 + p_3 = s_1 - p_1,$$

$$p_2^2 + p_3^2 = s_2 - p_1^2.$$

Возведем первое в квадрат и из результата вычтем второе, тогда получим

$$2p_2 \cdot p_3 = (s_1 - p_1)^2 - (s_2 - p_1^2).$$

Далее, учитывая, что

$$(p_2 - p_3)^2 = p_2^2 - 2p_2 p_3 + p_3^2 = 2(s_2 - p_1^2) - (s_1 - p_1)^2,$$

будем иметь два линейных уравнения

$$p_2 - p_3 = \pm\sqrt{2(s_2 - p_1^2) - (s_1 - p_1)^2},$$

$$p_2 + p_3 = s_1 - p_1.$$

Совместное решение дает искомую формулу

$$p_{2,3} = \frac{1}{2}(s_1 - p_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(s_2 - p_1^2) - (s_1 - p_1)^2}. \tag{2-14}$$

Для контроля имеем независимое соотношение

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = -\beta_1. \tag{2-15}$$

2. Уравнение четвертой степени

а) Наименьший по модулю корень образует комплексно-сопряженную пару ($p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$; $p_2 = -\alpha_1 - j\omega_1$).

Если проделать все выкладки, совершенно подобные тем, которые мы делали при выводе формулы (2-14), и учесть, что

$$p_1 + p_2 = -2\alpha_1 \text{ и } p_1^2 + p_2^2 = 2(\alpha_1^2 - \omega_1^2),$$

то получим

$$p_{3,4} = \frac{1}{2}(s_1 + 2\alpha_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2[s_2 - 2(\alpha_1^2 - \omega_1^2)] - (s_1 + 2\alpha_1)^2}. \quad (2\text{-}16)$$

Для контроля опять используем формулу

$$p_3 \cdot p_4 = \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \omega_1^2}. \quad (2\text{-}17)$$

б) Наименьший по модулю корень (p_1) является вещественным. Строим последовательность N и находим наибольший по модулю корень. Предположим, что он образует комплексно-сопряженную пару ($p_3 = -\alpha_3 + j\omega_3$ и $p_4 = -\alpha_3 - j\omega_3$).

Оставшийся корень p_2 может быть только вещественным и его значение будет равно

$$p_2 = s_1 - p_1 + 2\alpha_3 = -\beta_4 - p_1 + 2\alpha_3. \quad (2\text{-}18)$$

Контроль в этом случае может быть осуществлен по формуле

$$p_2 = \frac{\beta_1}{p_1(\alpha_3^2 + \omega_3^2)}. \quad (2\text{-}19)$$

в) Этот случай характеризуется тем, что оба корня (p_1 и p_4), наименьший и наибольший по модулю, вещественны. Два других корня найдем по формуле, аналогичной (2-14) и (2-16)

$$p_{2,3} = \frac{1}{2}(s_1 - p_1 - p_4) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(s_2 - p_1^2 - p_4^2) - (s_1 - p_1 - p_4)^2}. \quad (2\text{-}20)$$

Для контроля имеем

$$p_2 \cdot p_3 = \frac{\beta_1}{p_1 \cdot p_4}. \quad (2\text{-}21)$$

3. Уравнение пятой степени

а) Наименьший по модулю корень образует пару $p_1 = -\alpha_1 + j\omega$ и $p_2 = -\alpha_1 - j\omega_1$, а наибольший по модулю — пару $p_4 = -\alpha_4 + j\omega_4$ и $p_5 = -\alpha_4 - j\omega_4$. Корень p_3 будет, очевидно, вещественным и может быть определен по формуле

$$p_3 = s_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_4 = -\beta_5 + 2\alpha_1 + 2\alpha_4. \quad (2\text{-}22)$$

Для контроля имеем

$$p_3 = -\frac{\beta_1}{(\alpha_1^2 + \omega_1^2)\cdot(\alpha_4^2 + \omega_4^2)}. \quad (2\text{-}23)$$

б) В этом случае объединим два варианта:

1. Наименьший по модулю корень — вещественный (p_1), а наибольший образует пару $p_4 = -\alpha_4 + j\omega_4$; $p_5 = -\alpha_4 - j\omega_4$.

2. Наоборот, наименьший по модулю корень образует пару $p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$; $p_2 = -\alpha_1 - j\omega_1$, а наибольший — является вещественным.

В первом варианте

$$p_{2,3}=\frac{1}{2}(s_1-p_1+2\alpha_4)\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left[s_2-p_1^2-2(\alpha_4^2-\omega_4^2)\right]-(s_1-p_1+2\alpha_4)^2}. \tag{2-24}$$

Для контроля воспользуемся формулой

$$p_2\cdot p_3=-\frac{\beta_1}{p_1(\alpha_4^2+\omega_4^2)}. \tag{2-25}$$

В случае второго варианта получим формулу

$$p_{3,4}=\frac{1}{2}(s_1-p_5+2\alpha_1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left[s_2-p_5^2-2(\alpha_1^2-\omega_1^2)\right]-(s_1-p_5+2\alpha_1)^2}, \tag{2-26}$$

а для контроля имеем

$$p_3\cdot p_4=-\frac{\beta_1}{p_5(\alpha_1^2+\omega_1^2)}. \tag{2-27}$$

в) Оба корня оказались вещественными. В этом случае для определения трех других корней необходимо решать вспомогательное уравнение третьей степени. Предположим, что оно имеет вид

$$p^3+\beta_3^1p^2+\beta_2^1p+\beta_1^1=0. \tag{2-28}$$

Из (2-10) и (2-8) следует:

$$\left.\begin{aligned} s_1^1&=-\beta_3^1=p_2+p_3+p_4\\ s_2^1&=-2\beta_2^1+(\beta_3^1)^2=p_2^2+p_3^2+p_4^2\\ s_3^1&=3(\beta_3^1\beta_2^1-\beta_1^1)-(\beta_3^1)^3=p_2^3+p_3^3+p_4^3.\end{aligned}\right\} \tag{2-29}$$

Согласно (2-8) для исходного уравнения имеем

$$s_1=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5$$

$$s_2=p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2$$

$$s_3=p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3.$$

Сравнивая, приходим к формулам:

$$\left.\begin{aligned} s_1^1&=s_1-p_1-p_5\\ s_2^1&=s_2-p_1^2-p_5^2\\ s_3^1&=s_3-p_1^3-p_5^3.\end{aligned}\right\} \tag{2-30}$$

Из (2-29) легко найдем

$$\beta_3^1=-s_1^1$$

$$\beta_2^1=\frac{1}{2}(s_1^1)^2-\frac{1}{2}s_2^1$$

$$\beta_1^1=\beta_3^1\beta_2^1-\frac{1}{3}\left[s_3^1+(\beta_3^1)^3\right]. \tag{2-31}$$

Решив уравнение (2-28), найдем недостающие корни p_2, p_3 и p_4. Для контроля вычислений имеем

$$p_2\cdot p_3\cdot p_4=-\frac{\beta_1}{p_1\cdot p_5}. \tag{2-32}$$

4. Уравнение шестой степени

а) Этот случай характеризуется теми же условиями, что и случай а) для уравнения пятой степени, то есть имеем две пары корней $p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$ и $p_2 = -\alpha_1 - j\omega_1$, а также $p_5 = -\alpha_5 + j\omega_5$ и $p_6 = -\alpha_5 - j\omega_5$. Два других корня найдем по формуле

$$p_{3,4} = \frac{1}{2}(s_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_5) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2[s_2 - 2(\alpha_1^2 - \omega_1^2) - 2(\alpha_5^2 - \omega_5^2)] - (s_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_5)^2}. \quad (2\text{-}33)$$

Для контроля имеем равенство

$$p_3 \cdot p_4 = \frac{\beta_1}{(\alpha_1^2 + \omega_1^2)(\alpha_5^2 + \omega_5^2)}. \quad (2\text{-}34)$$

б) Смотрите случай б) для уравнения пятой степени.

Первый вариант: определены вещественный корень p_1 и пара комплексно-сопряженных корней с наибольшим модулем $p_5 = -\alpha_5 + j\omega_5$ и $p_6 = -\alpha_5 - j\omega_5$. Для определения трех других корней строим вспомогательное уравнение третьей степени, имеющее вид (2-28). Коэффициенты этого уравнения определятся по формулам (2-31), однако теперь

$$\left.\begin{aligned} s_1^1 &= s_1 - p_1 + 2\alpha_5 \\ s_2^1 &= s_2 - p_1^2 - 2(\alpha_5^2 - \omega_5^2) \\ s_3^1 &= s_3 - p_1^3 + 2\alpha_5(\alpha_5^2 - 3\omega_5^2). \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}35)$$

Контрольная формула имеет вид

$$p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = \frac{\beta_1}{p_1(\alpha_5^2 + \omega_5^2)}. \quad (2\text{-}36)$$

Во втором варианте, когда определена пара корней $p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$ и $p_2 = -\alpha_1 - j\omega_1$ и вещественный корень с наибольшим модулем p_6, вместо (2-33) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} s_1^1 &= s_1 - p_6 + 2\alpha_1 \\ s_2^1 &= s_2 - p_6^2 - 2(\alpha_1^2 - \omega_1^2) \\ s_3^1 &= s_3 - p_6^3 + 2\alpha_1(\alpha_1^2 - 3\omega_1^2). \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}37)$$

Коэффициенты вспомогательного кубического уравнения (2-28) определятся по-прежнему формулами (2-31), а вместо (2-36) можем написать

$$p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = \frac{\beta_1}{p_6(\alpha_1^2 + \omega_1^2)}. \quad (2\text{-}38)$$

в) Оба корня p_1 и p_6 — вещественны.

Построим вспомогательное уравнение четвертой степени

$$p^4 + \beta_4^1 p^3 + \beta_3^1 p^2 + \beta_2^1 p + \beta_1^1 = 0. \quad (2\text{-}39)$$

Согласно рассмотренной ранее методике, можем написать

$$\left.\begin{aligned} s_1^1 &= s_1 - p_1 - p_6 \\ s_2^1 &= s_2 - p_1^2 - p_6^2 \\ s_3^1 &= s_3 - p_1^3 - p_6^3 \\ s_4^1 &= s_4 - p_1^4 - p_6^4. \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}40)$$

Из системы (2-10) найдем коэффициенты уравнения (2-39)

$$\left.\begin{aligned}
\beta_4^1 &= -s_1^1\\
\beta_3^1 &= \frac{1}{2}(s_1^1)^2 - \frac{1}{2}s_2^1\\
\beta_2^1 &= \beta_4^1\beta_3^1 - \frac{1}{3}[s_3^1 + (\beta_4^1)^3]\\
\beta_1^1 &= -\frac{1}{4}[s_4^1 + \beta_4^1 s_3^1 + \beta_3^1 s_2^1 + \beta_2^1 s_1^1].
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}41)$$

Таким образом, мы свели задачу к решению уравнения четвертой степени. Для контроля опять можем воспользоваться формулой (2-11). Уравнения более высоких степеней могут быть решены совершенно аналогично. Дело сведется к построению вспомогательных уравнений, степени которых будут зависеть от характера первоначально определенных корней с наименьшим и наибольшим модулем. Методика определения коэффициентов вспомогательных уравнений ясна из предыдущего. Она применима для уравнений любой степени. Отметим, что формулы, которые мы получили для определения других корней, а также формулы для определения коэффициентов вспомогательных уравнений являются точными. Естественно, они окажутся приближенными, если в них подставлять приближенные значения первоначально найденных корней с наименьшим и наибольшим модулем.

Рассмотрим несколько примеров*, иллюстрирующих технику расчета по предлагаемому методу. Все вычисления будем производить на обычной счетной линейке.

П р и м е р 1. Характеристическое уравнение лентопротяжного механизма имеет вид

$$D(p) = p^3 + 8{,}2p^2 + 157p + 231 = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\beta_3 = 8{,}2;\ \beta_2 = 157;\ \beta_1 = 231\quad(\beta_4 = 1).$$

Найдем корни этого уравнения. Для определения наименьшего по модулю корня строим последовательность M. Формулы (1-17) дают

$$M_0 = \frac{1}{\beta_1} = 43{,}3\cdot 10^{-4};\quad M_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1}M_0 = 29{,}2\cdot 10^{-4};$$

$$M_2 = -\frac{1}{\beta_1}(M_0\beta_3 - M_1\beta_2) = 18{,}3\cdot 10^{-4};$$

$$M_3 = \frac{1}{\beta_1}(M_0\beta_4 - M_1\beta_3 + M_0\beta_2) = 11{,}4\cdot 10^{-4};$$

$$M_4 = -\frac{1}{\beta_1}(-M_1\beta_4 + M_2\beta_3 - M_3\beta_2) = 7{,}2\cdot 10^{-4};$$

$$M_5 = \frac{1}{\beta_1}(M_2\beta_4 - M_3\beta_3 + M_4\beta_2) = 4{,}53\cdot 10^{-4};$$

$$M_6 = -\frac{1}{\beta_1}(-M_3\beta_4 + M_4\beta_3 - M_5\beta_2) = 2{,}87\cdot 10^{-4}.$$

---

* Все примеры заимствованы из книги В. В. Солодовникова и др. «Частотный метод построения переходных процессов», ГИТТЛ, М., 1955. Там же даны замечания корней с точностью до трех значащих цифр. Эти значения мы будем называть точными.

Ограничимся этим. Члены последовательности монотонно уменьшаются, следовательно, наименьший по модулю корень — вещественный.

Составим три отношения:

$$\frac{M_3}{M_4} = 1{,}58; \quad \frac{M_4}{M_5} = 1{,}59; \quad \frac{M_5}{M_6} = 1{,}575;$$

их среднее арифметическое, с точностью до трех значащих цифр, равно 1,58, что совпадает с точным значением. Таким образом, искомый корень равен $p_1 = -1{,}58$.

Найдем два других корня. По формулам (2-10) находим

$$s_1 = -\beta_3 = -8{,}2; \quad s_2 = \beta_3^2 - 2\beta_2 = -246{,}8.$$

Имея в виду, что

$$s_1 - p_1 = -8{,}2 + 1{,}58 = -6{,}62 \text{ и } s_2 - p_1^2 = -249{,}3,$$

по формуле (2-14) получаем

$$p_{2,3} = -3{,}31 \pm j\,11{,}65.$$

Контрольная формула (2-15) дает

$$p_1 = -\frac{\beta_1}{p_2 \cdot p_3} = -1{,}575.$$

Точное значение корней $p_{2,3}$ равно $-3{,}32 \pm j\,11{,}6$.

Пример 2. Характеристическое уравнение электрогидравлической следящей системы имеет вид

$$D(p) = p^4 + 103\,p^3 + 3065\,p^2 + 149250\,p + 1081500 = 0,$$

то есть

$$\beta_5 = 1; \quad \beta_4 = 103; \quad \beta_3 = 3065; \quad \beta_2 = 149250; \quad \beta_1 = 1081500.$$

Найдем корни этого уравнения. Для определения наименьшего по модулю корня строим последовательность M по формулам (1-17)

$$M_0 = 0{,}925\cdot 10^{-6}; \; M_1 = 12{,}7\cdot 10^{-6}; \; M_2 = 1{,}75\cdot 10^{-6}; \; M_3 = 0{,}205\cdot 10^{-6};$$

$$M_4 = 0{,}0245\cdot 10^{-6}; \; M_5 = 0{,}00295\cdot 10^{-6}; \; M_6 = 0{,}000355\cdot 10^{-6}.$$

Характер последовательности указывает на то, что искомый корень — вещественный. Составим соотношения:

$$\frac{M_3}{M_4} = 8{,}36; \quad \frac{M_4}{M_5} = 8{,}3; \quad \frac{M_5}{M_6} = 8{,}3.$$

Принимаем значение $p_1 = -8{,}3$ как более надежное, так как оно соответствует большим значениям k. Это значение корня совпадает с точным. Определим теперь корень с наибольшим модулем, для чего построим последовательность N по формулам (2-4):

$$N_0 = 1; \quad N_1 = \beta_4 = 103; \quad N_2 = \beta_4^2 - \beta_3 = 0{,}754\cdot 10^4;$$

$$N_3 = \beta_2 - N_1\beta_3 + N_2\beta_4 = 60{,}93\cdot 10^4;$$

$$N_4 = -(\beta_1 - N_1\beta_2 + N_2\beta_3 - N_3\beta_4) = 57{,}8\cdot 10^6;$$

$$N_5 = -N_1\beta_1 + N_2\beta_2 - N_3\beta_3 + N_4\beta_4 = 51\cdot 10^8;$$

$$N_6 = -(N_2\beta_1 - N_3\beta_2 + N_4\beta_3 - N_5\beta_4) = 44{,}31\cdot 10^{10};$$

$$N_7 = -N_3\beta_1 + N_4\beta_2 - N_5\beta_3 + N_6\beta_4 = 38{,}84\cdot 10^{12};$$

$$N_8 = -(N_4\beta_1 - N_5\beta_2 + N_6\beta_3 - N_7\beta_4) = 33{,}39\cdot 10^{14}.$$

Последовательность меняется монотонно без перемены знака, следовательно, искомый корень — вещественный. Составим отношения соответственно (2-6):

$$\frac{N_6}{N_5} = 87; \quad \frac{N_7}{N_6} = 87{,}5; \quad \frac{N_8}{N_7} = 85{,}9.$$

Принимаем $p_4 = -85{,}9$, что совпадает с точным значением. Имеем, таким образом, случай в) для уравнения четвертой степени. Два других корня найдем по формуле (2-20) ($S_1 = -103$; $S_2 = 4480$)

$$p_{2,3} = -4{,}4 \pm j\,38{,}7,$$

Точное значение корней равно $-4{,}42 \pm j\ 38{,}7$.

Контрольная формула (2-21) дает

$$p_2 \cdot p_3 = \frac{\beta_1}{p_1 \cdot p_4} = 1480$$

или

$$\sqrt{p_2 \cdot p_3} = |p_3| = 38{,}5,$$

а модуль найденного корня равен приблизительно 38,7.

Пример 3. Для системы самолет-автопилот имеем характеристическое уравнение шестой степени с коэффициентами:

$\beta_7 = 1$; $\beta_6 = 16{,}4$; $\beta_5 = 107{,}4$; $\beta_4 = 364{,}2$; $\beta_3 = 1146{,}5$: $\beta_2 = 771{,}2$; $\beta_1 = 292{,}1$ т. е.

$$D(p) = p^6 + 16{,}4p^5 + 107{,}4p^4 + 364{,}2p^3 + 1146{,}5p^2 + 771{,}2p + 292{,}1 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения. Начнем, как обычно, с наименьшего по модулю корня. Строим последовательность M

$$M_0 = 34{,}4 \cdot 10^{-4}; \quad M_1 = 91 \cdot 10^{-4}; \quad M_2 = 106 \cdot 10^{-4}; \quad M_3 = -33 \cdot 10^{-4};$$

$$M_4 = -403 \cdot 10^{-4}; \quad M_5 = -492 \cdot 10^{-4}; \quad M_6 = 205 \cdot 10^{-4};$$

$$M_7 = 1985 \cdot 10^{-4}; \quad M_8 = 3960 \cdot 10^{-4}; \quad M_9 = 3050 \cdot 10^{-4}.$$

Характер последовательности не оставляет сомнения в том, что искомый корень образует комплексно-сопряженную пару. По формуле (1-18) имеем:

для $\kappa = 5$

$$\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\frac{|M_7 \cdot M_4 - M_6 \cdot M_5|}{|M_6^2 - M_5 \cdot M_7|} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}686 = 0{,}343;$$

для $\kappa = 6$

$$\alpha_1 \simeq \frac{1}{2}\frac{|M_8 M_5 - M_7 \cdot M_6|}{|M_7^2 - M_6 \cdot M_8|} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}752 = 0{,}376;$$

для $\kappa = 7$

$$\alpha_1 \simeq \frac{1}{2}\frac{|M_9 \cdot M_6 - M_8 \cdot M_7|}{|M_8^2 - M_7 \cdot M_9|} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 = 0{,}375.$$

Принимаем последнее значение. Найдем квадрат модуля корня ($\kappa = 7$)

$$\alpha_1^2 + \omega_1^2 \approx \frac{|M_7^2 - M_8 \cdot M_6|}{|M_8^2 - M_7 \cdot M_9|} = 0{,}324,$$

отсюда

$$\omega_1 = \sqrt{0{,}324 - \alpha_1^2} = 0{,}428.$$

Таким образом, $p_{1,2} = -0{,}375 \pm j\,0{,}428$. Точное значение равно $-0{,}377 \pm \pm j\,0{,}428$.

Займемся определением наибольшего по модулю корня. Строим последовательность N

$$N_0 = 1;\quad N_1 = 16{,}4;\quad N_2 = 161{,}6;\quad N_3 = 1{,}244\cdot 10^4;$$

$$N_4 = -7{,}804\cdot 10^3;\quad N_5 = -220{,}7\cdot 10^3;\quad N_6 = -2{,}617\cdot 10^6;$$

$$N_7 = -23{,}23\cdot 10^6;\quad N_8 = -169\cdot 10^6;\quad N_9 = -974\cdot 10^6.$$

Последовательность меняет знак, следовательно, искомый корень является комплексным. По формуле (2-7) находим для $\kappa = 5, 6, 7$

$$\alpha_5 \approx \frac{1}{2}\;\frac{|N_7\cdot N_4 - N_6\cdot N_5|}{|N_5^2 - N_6\cdot N_4|} = \frac{1}{2}\cdot 14 = 7\quad (\kappa = 5);$$

$$\alpha_5 \approx \frac{1}{2}\cdot 13{,}85 = 6{,}92\quad (\kappa = 6);$$

$$\alpha_5 \approx \frac{1}{2}\,14{,}2 = 7{,}1\quad (\kappa = 7).$$

Принимаем значение, соответствующее $\kappa = 7$, тогда

$$\alpha_5^2 + \omega_5^2 \approx \frac{|N_8^2 - N_7\cdot N_9|}{|N_7^2 - N_8\cdot N_6|} = 61{,}7,$$

откуда

$$\omega_5 = \sqrt{61{,}7 - \alpha_5^2} = 3{,}36.$$

Таким образом, $p_{5,6} = -7{,}1 \pm j\,3{,}36$. Точное значение корня равно $-7{,}15 \pm j\,3{,}35$. Имеем случай а) для уравнения шестой степени. Два оставшихся корня найдем по формуле (2-33):

$$s_1 = -16{,}4;\quad s_2 = 54{,}2;$$

$$s_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_5 = -1{,}45;\quad s_2 - 2(\alpha_1^2 - \omega_1^2) - 2(\alpha_5^2 - \omega_5^2) = -24.$$

Формула (2-33) дает

$$p_{3,4} \approx -0{,}725 \pm j\,3{,}55.$$

Точное значение корня $-0{,}648 \pm j\,3{,}74$. Расхождение заметное. Как уже отмечалось, оно связано с погрешностью первоначально найденных корней.

Заключение

Рассмотренные примеры показывают, что предлагаемый метод достаточно прост и удобен для инженерных расчетов на обычной счетной линейке и арифмометре. Он удобен также для вычислений на ЭЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Загускин. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Физматгиз, М., 1960.
2. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Гостехиздат, М., 1952.