

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ВЕРТИКАЛИ

О. А. АРТЮХОВСКИЙ, А. И. СТУДЕНИКИН

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры гироскопических приборов
и устройств)

Одной из основных ошибок прецизионных инерциальных навигационных систем является ошибка, возникающая вследствие неучета в формулах бортового алгоритма несферичности Земли. В связи с этим представляет интерес исследование уравнений инерциальной навигации, полученных с учетом несферичности Земли, и оценка методических ошибок инерциальной вертикали.

Будем считать, что Земля представляет собой эллипсоид вращения с малым сжатием в направлении полюсов. В соответствующих местах под параметрами земного сфероида будем понимать параметры эллипсоида Красовского. Введем в рассмотрение следующую ортогональную систему координат — систему $\xi_0\eta_0\xi_0$, связанную с Землей. Начало O этой системы координат совместим с центром Земли. Ось $O\eta_0$ направим вдоль вектора угловой скорости вращения Земли $\bar{\omega}$. За ось $O\xi_0$ примем линию пересечения экватора плоскостью гринвичского меридиана. Ось $O\xi_0$ перпендикулярна первым двум так, чтобы система осей была правой.

В точке вылета поместим систему координат $\xi^1\eta^1\xi^1$, ось которой направим вверх по радиусу-вектору \bar{R} , ось $O\eta_1$ — в плоскости ортодромического меридиана по направлению к ортодромическому полюсу.

Геоцентрическая система координат $\xi^1\eta^1\xi^1$ определяет, таким образом, ортодромию как центральное сечение земного сфероида, проведенное через две заданные точки либо через одну точку, заданную геоцентрическими координатами, и азимут. Выбранную ортодромию будем характеризовать следующей таблицей направляющих косинусов между осями $\xi_0\eta_0\xi_0$ и $\xi^1\eta^1\xi^1$:

$$\left. \begin{aligned} n_{11} &= \cos \lambda_0 \cdot \sin N_0 + \sin \lambda_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \sin N_0, \\ n_{12} &= \cos \varphi_0 \cdot \sin N_0, \\ n_{13} &= \sin \varphi_0 \cdot \cos \lambda_0 \cdot \sin N_0 - \sin \lambda_0 \cdot \cos N_0, \\ n_{21} &= \sin \lambda_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos N_0 - \cos \lambda_0 \cdot \sin N_0, \\ n_{22} &= \cos \varphi_0 \cdot \sin N_0, \\ n_{23} &= \cos \lambda_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos N_0 + \sin \lambda_0 \cdot \sin N_0, \\ n_{31} &= \sin \lambda_0 \cdot \cos \varphi_0; \quad n_{32} = -\sin \varphi_0; \quad n_{33} = \cos \lambda_0 \cdot \cos \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

λ_0 — долгота точки старта, φ_0 — геоцентрическая широта точки старта, N_0 — угол ортодромии в точке старта. Свяжем с текущими координатами летательного аппарата геоцентрическую систему отсчета $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Взаимное расположение систем $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $\xi^1\eta^1\zeta^1$ определим таблицей направляющих косинусов, составленной по геоцентрическим ортодромическим координатам.

Перемножая матрицы, записанные в табл. 1 и 2, получим направляющие косинусы между осями: $\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $\xi_1\eta_1\zeta_1$

Таблица 1

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ^1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
η^1	n_{21}	n_{22}	n_{23}
ζ^1	n_{31}	n_{32}	n_{33}

Таблица 2

	ξ^1	η^1	ζ^1
ξ_1	$\cos \Lambda_1$	0	$-\sin \Lambda_1$
η_1	$\sin \Lambda_1 \cdot \sin \Phi_1$	$\cos \Phi_1$	$\cos \Lambda_1 \cdot \sin \Phi_1$
ζ_1	$\sin \Lambda_1 \cos \Phi_1$	$-\sin \Phi_1$	$\cos \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1$

Таблица 3

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ_1	m_{11}	m_{12}	m_{13}
η_1	m_{21}	m_{22}	m_{23}
ζ_1	m_{31}	m_{32}	m_{33}

Таблица 4

	ξ_1	η_1	ζ_1
ξ	1	0	$-\nu_2$
η	0	1	ν_1
ζ	ν_2	$-\nu_1$	1

$$\left. \begin{aligned}
 m_{11} &= n_{11} \cos \Lambda_1 - n_{31} \sin \Lambda_1, \\
 m_{12} &= n_{12} \cdot \cos \Lambda_1 - n_{32} \sin \Lambda_1, \\
 m_{13} &= n_{13} \cdot \cos \Lambda_1 - n_{33} \sin \Lambda_1, \\
 m_{21} &= n_{11} \cdot \sin \Lambda_1 \cdot \sin \Phi_1 + n_{21} \cos \Phi_1 + n_{31} \cdot \sin \Phi_1 \cdot \cos \Lambda_1, \\
 m_{22} &= n_{12} \cdot \sin \Lambda_1 \cdot \sin \Phi_1 + n_{22} \cos \Phi_1 + n_{32} \cdot \sin \Phi_1 \cdot \cos \Lambda_1, \\
 m_{23} &= n_{13} \cdot \sin \Lambda_1 \cdot \sin \Phi_1 + n_{23} \cos \Phi_1 + n_{33} \cdot \sin \Phi_1 \cdot \cos \Lambda_1, \\
 m_{31} &= n_{11} \cdot \sin \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1 - n_{21} \cdot \sin \Phi_1 + n_{31} \cos \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1, \\
 m_{32} &= n_{12} \cdot \sin \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1 - n_{22} \cdot \sin \Phi_1 + n_{32} \cos \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1, \\
 m_{33} &= n_{13} \cdot \sin \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1 - n_{23} \cdot \sin \Phi_1 + n_{33} \cdot \cos \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1.
 \end{aligned} \right\} (2)$$

Будем считать, что на борту летательного аппарата материализована геодезическая вертикаль, с которой совпадает одна из осей системы координат $\xi\eta\zeta$. Обозначив углы уклонения геодезической вертикали от направления радиуса вектора в плоскости ортодромического меридиана через ν_1 и в направлении, перпендикулярном плоскости меридиана через ν_2 , получим связь между системами координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $\xi\eta\zeta$ в виде табл. 4, записанной с учетом малости углов ν_1 и ν_2 . Углы ν_1 и ν_2 находятся из простых соотношений

$$\nu_1 = \mu \cdot \cos N, \quad \nu_2 = -\mu \cdot \sin N, \quad (3)$$

связывающих значения этих углов с геометрической формой Земли.

Функция $\mu(B)$ дается с помощью тригонометрического ряда [1], причем нам достаточно удержать первых два члена:

$$\mu = c \cdot \sin 2B - \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin 4B, \quad (4)$$

где

$c = (a^2 - b^2) (a^2 + b^2)^{-1}$, a , b — полуоси эллипсоида Красовского, B — геодезическая широта.

За координаты летательного аппарата в этом случае целесообразно принять следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \nu_1, \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \frac{\nu_2}{\cos \Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Выбор ортодромических координат в форме (5) оправдан тем, что пересчет координат из географической системы в ортодромическую и наоборот может быть осуществлен посредством использования матричных преобразований вида (1) и (2). Это можно показать. Пусть летательный аппарат находится в точке с геодезическими координатами B и L и ортодромическими Φ и Λ . Им соответствуют геоцентрические координаты $\varphi = B - \mu$; $\lambda = L$; $\Phi_1 = \Phi - \nu_1$; $\Lambda_1 = \Lambda - \nu_2 (\cos \Phi)^{-1}$.

Подставляя последнее в правые части формул (1) и (2), получим две системы тождества. Например, для m_{32} будем иметь

$$- (n_{12} \cdot \sin \Lambda_1 \cos \Phi_1 - n_{22} \sin \Phi_1 + n_{32} \cdot \cos \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1) = \sin \varphi.$$

Подставляя в последнее выражение Φ и Λ вместо Φ_1 и Λ_1 и учитывая (1), (2), (3), получим с точностью до членов C^2

$$\begin{aligned} & - \left[n_{12} \cdot \sin \left(\Lambda_1 + \frac{\nu_2}{\cos \Phi} \right) \cdot \cos (\Phi_1 + \nu_1) - n_{22} \sin (\Phi_1 + \nu_1) + \right. \\ & \left. + n_{32} \cos \left(\Lambda_1 + \frac{\nu_2}{\cos \Phi} \right) \cdot \cos (\Phi_1 + \nu_1) \right] = \sin \varphi + \mu \cdot \cos \varphi = \sin B. \end{aligned}$$

Основное уравнение инерциальной навигации, записанное применительно к системе координат $\xi\eta\zeta$, имеет вид [2, 3]

$$\left. \begin{aligned} \dot{j}_\xi &= V'_\xi + V_\zeta \Omega_\eta - V_\eta \Omega_\zeta - f_\xi, \\ \dot{j}_\eta &= V'_\eta + V_\xi \Omega_\zeta - V_\zeta \Omega_\xi - f_\eta, \\ \dot{j}_\zeta &= V'_\zeta + V_\eta \Omega_\xi - V_\xi \Omega_\eta - f_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где Ω_ξ , Ω_η , Ω_ζ , V_ξ , V_η , V_ζ — составляющие абсолютной угловой и линейной скоростей радиуса-вектора. Вводя в рассмотрение относительные линейные скорости объекта и используя табл. 4, можно показать, что проекции абсолютной угловой и линейной скоростей на оси $\xi\eta\zeta$ будут равны:

$$\begin{aligned} \Omega_\xi &= -\frac{W_{\eta 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \sin N - \left(-\frac{W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 - \omega \sin \varphi \right) \nu_2; \\ \Omega_\eta &= \frac{W_{\xi 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N + \left(-\frac{W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \varphi_1 - \omega \cdot \sin \varphi \right) \nu_1; \\ \Omega_\zeta &= -\frac{W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 - \omega \sin \varphi + \left(\frac{W_{\eta 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N \right) \nu_2 - \\ & \quad - \left(\frac{W_{\xi 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N \right) \nu_1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
V_{\xi} &= W_{\xi 1} - V_{\zeta} v_2 + R \omega \cos \varphi \cdot \cos N; \\
V_{\eta} &= W_{\eta 1} + V_{\zeta} v_1 - R \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N; \\
V_{\zeta} &= W_{v 1} + W_{\xi 1} \cdot v_2 - W_{\eta 1} v_1 + R \omega \cos \varphi \cdot \cos N \cdot v_2 + R \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N \cdot v_1,
\end{aligned}$$

а для системы (6) будем иметь

$$\begin{aligned}
j_{\xi} &= W'_{\xi 1} - (V_{\zeta 1} \cdot v_2)' + \frac{W_{\xi 1} V_{\zeta 1}}{R} + \frac{W_{\eta 1} W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 + \\
&2V_{\zeta 1} \cdot \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N + 2W_{\eta 1} \cdot \omega \cdot \sin \varphi - R\omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin N + \\
&+ \left(\frac{W_{\zeta 1}^2}{R} + \frac{W_{\eta 1}^2}{R} + 2W_{\xi 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N - \right. \\
&\left. - 2W_{\eta 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N + R\omega^2 \cos^2 \varphi \right) v_2 - f_{\xi}. \quad (8) \\
j_{\eta} &= W'_{\eta 1} + (V_{\zeta} \cdot v_1)' - \frac{W_{\xi 1}^2}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 + \frac{V_{\zeta 1} W_{\eta 1}}{R} - \\
&- 2W_{\xi 1} \omega \cdot \sin \varphi - 2V_{\zeta 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N - R\omega^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos N - \\
&- \left(\frac{W_{\xi 1}^2}{R} + \frac{W_{\eta 1}^2}{R} + 2W_{\xi 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N - 2W_{\eta 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N + \right. \\
&\left. + R\omega^2 \cos^2 \varphi \right) v_1 - f_{\eta}. \\
j_{\zeta} &= V'_{\zeta} + (W_{\xi 1} \cdot v_2)' - (W_{\eta 1} \cdot v_1)' - \frac{W_{\eta 1}^2}{R} - \frac{W_{\xi 1}^2}{R} + \\
&+ 2W_{\eta 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N - 2W_{\xi 1} \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N - R\omega^2 \cos^2 \varphi + \\
&+ \left(\frac{W_{\xi 1} W_{\zeta 1}}{R} + \frac{W_{\xi 1} W_{\eta 1}}{R} \operatorname{tg} \Phi_2 + 2W_{\eta 1} \omega \cdot \sin \varphi + 2V_{\zeta 1} \omega \cos \varphi \cos N - \right. \\
&\left. - R\omega^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin N \right) v_2 - \left(\frac{W_{\eta 1} W_{\zeta 1}}{R} - \frac{W_{\xi 1}^2}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 - \right. \\
&\left. - 2W_{\xi 1} \omega \sin \varphi - 2V_{\zeta 1} \omega \cos \varphi \cdot \sin N - R\omega^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos N \right) v_1 - f_{\zeta}.
\end{aligned}$$

Перейдем в (7) и (8) к геодезическим координатам B и Φ , а также к составляющим относительной скорости в системе $\xi\eta\zeta$, для чего в (8) подставим следующие соответствия:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \Phi - v_1; \quad \varphi = B - \mu; \quad W_{\xi 1} = W_{\xi} + V_{\zeta} v_2; \\
W_{\eta 1} &= W_{\eta} - V_{\zeta} \cdot v_1; \quad V_{\zeta 1} = V_{\zeta} - W_{\xi} v_2 + W_{\eta} \cdot v_1,
\end{aligned}$$

из которых три последние оправданы естественным допущением $V_{\zeta} v_{1;2} = V_{\zeta 1} \cdot v_{1;2}$; $W_{\eta} v_{1;2} = W_{\eta 1} v_{1;2}$. Также учитывается, что для гироскопа, ориентированной по вектору силы тяжести, справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
-R\omega^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin N + R\omega^2 \cos^2 \varphi v_2 - f_{\zeta} &= 0, \\
-R\omega^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos N - R\omega^2 \cos^2 \varphi \cdot v_1 - f_{\eta} &= 0.
\end{aligned}$$

После несложных преобразований получим для показаний горизонтальных акселерометров и сигналов коррекции платформы

$$j_{\xi} = W'_{\xi} + \frac{W_{\xi} W_{\eta}}{R} \operatorname{tg} \Phi + 2W_{\eta} \omega \cdot \sin B + 2V_{\zeta} \omega \cdot \cos B \cdot \cos N,$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta} &= W'_{\eta} - \frac{W_{\xi}^2}{R} \operatorname{tg} \Phi - 2W_{\xi} \omega \sin B - 2V_c \omega \cos B \cdot \sin N, \\
\Omega_{\xi} &= -\frac{W_{\eta}}{R} + \omega \cdot \cos B \cdot \sin N + \frac{W_{\xi}}{R} \operatorname{tg} \Phi v_2, \\
\Omega_{\eta} &= \frac{W_{\xi}}{R} + \omega \cdot \cos B \cdot \cos N - \frac{W_{\xi}}{R} \operatorname{tg} \Phi v_1, \\
\Omega_{\zeta} &= -\frac{W_{\xi}}{R} \operatorname{tg} \Phi - \omega \sin B - \frac{W_{\eta}}{R} v_2,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $R = a(1 - c \cdot \sin^2 B)$.

Если пренебречь третьим слагаемым в выражениях для Ω_{ξ} ; Ω_{η} ; Ω_{ζ} , что справедливо при полете вдоль ортодромии ($\Phi = v_1$; $W_{\eta} = 0$), то можно считать, что соотношения (9) записаны для шара геодезических широт B . Шаровая структура формул (9) и отмеченная выше возможность использования сферических формул для преобразования координат Φ и Λ в B и L дают основание рассматривать работу инерциальной вертикали на сфере переменного радиуса, полученной как сферическое изображение эллипсоида на шар. Поэтому для анализа методических ошибок более простых алгоритмов (отсутствие поворотных ускорений, содержащих V_c , постоянное значение R и т. д.) можно использовать общие дифференциальные уравнения ошибки инерциальной системы (2) для шарообразной Земли. В этом случае в правые части уравнений для ошибки в построении вертикали необходимо подставить разности методических точных формул (9) и принятых в вычислителе, понимая эти разности как ошибки, эквивалентные ошибкам акселерометров и уходам стабилизирующих гироскопов. При реализации в вычислителе полных формул (9) с переменным R правые части уравнений ошибки равны нулю. Следовательно, в полете платформа будет ориентирована по геодезической вертикали.

Непрерывное числение координат по уравнениям:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\text{сч}} &= \Lambda_0 + \int_0^t \frac{1}{R \cos \Phi} \left\{ \int_0^t W'_{\xi} dt \right\} dt; \quad \Phi_{\text{сч}} = \Phi_0 - \int_0^t \frac{1}{R} \left\{ \int_0^t W'_{\eta} dt \right\} dt; \\
W'_{\xi} &= j_{\xi} - \frac{W_{\xi} W_{\eta}}{R} \operatorname{tg} \Phi - 2W_{\eta} \omega \cdot \sin B - 2V_c \omega \cos B \cos N; \\
W'_{\eta} &= j_{\eta} + \frac{W_{\xi}^2}{R} \operatorname{tg} \Phi + 2W_{\xi} \omega \sin B + 2V_c \omega \cos B \cdot \sin N,
\end{aligned}$$

казалось бы, должно давать значения Φ и Λ . Однако этого не происходит. Действительно, выражения для относительных ускорений W'_{ξ} и W'_{η} из (8) для случая горизонтального полета будут иметь вид

$$\begin{aligned}
W'_{\xi} &= W'_{\xi 1} + 2C^2 W_{\eta 0} \cos B \cdot \sin 2B \cdot \sin N \cdot B' - C^2 W_{\eta 0} \sin 2B (\sin 2B \cdot \sin N)'; \\
W'_{\eta} &= W'_{\eta 1} + 2C^2 W_{\eta 0} \cdot \cos B \cdot \sin 2B \cdot \cos N \cdot B' - C^2 W_{\eta 0} \sin 2B (\sin 2B \cdot \cos N)'.
\end{aligned}$$

По-прежнему с точностью до членов C^2 имеем

$$W'_{\xi} = W'_{\xi 1}; \quad W'_{\eta} = W'_{\eta 1}.$$

Следовательно, инерциальная система будет считать геоцентрические координаты Λ_1 и Φ_1 . С учетом того, что в месте старта в вычислитель вводятся точные координаты, полная ошибка будет равна

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi &= c \sin 2B \cdot \cos N - v_1^0, \\
\Delta \Lambda &= -\frac{c \cdot \sin 2B \cdot \sin N}{\cos \Phi}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Методическая ошибка является чисто геометрической. Максимальное значение ее достигает 22 км.

Выводы

Если для сфероидальной Земли плоскость ортодромии совпадает с центральным сечением, то пересчет ортодромических координат в форме (5) в геодезические производится по обычным формулам.

Методически точные уравнения инерциального ориентатора допускают сферическое изображение на шар переменного радиуса, то есть могут быть получены из «шаровых формул» заменой геоцентрических координат Φ_1 и φ геодезическими Φ и B . При этом инерциальная система является строителем геодезической вертикали, но имеет ошибку в координате. Простыми поправками могут служить выражения (10), взятые с обратным знаком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Багратуни. Курс сферической геодезии. Изд. географ. литературы, М., 1962.
 2. В. Д. Андреев. К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, т. 28, вып. 1, 1964.
 3. К. Л. Мак-Клур. Теория инерциальной навигации. «Наука», М., 1964.
-