ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 192 1975

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ВЕРТИКАЛИ

О. А. АРТЮХОВСКИЙ, А. И. СТУДЕНИКИН

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры гироскопических приборов и устройств)

Одной из основных ошибок прецизионных инерциальных навигационных систем является ошибка, возникающая вследствие неучета в формулах бортового алгоритма несферичности Земли. В связи с этим представляет интерес исследование уравнений инерциальной навигации, полученных с учетом несферичности Земли, и оценка методических ошибок инерциальной вертикали.

Будем считать, что Земля представляет собой эллипсоид вращения с малым сжатием в направлении полюсов. В соответствующих местах под параметрами земного сфероида будем понимать параметры эллипсоида Красовского. Введем в рассмотрение следующую ортогональную систему координат — систему $\xi_0\eta_0\zeta_0$, связанную с Землей. Начало O этой системы координат совместим с центром Земли. Ось $O\eta_0$ направим вдоль вектора угловой скорости вращения Земли $\bar{\omega}$. За ось $O\xi_0$ примем линию пересечения экватора плоскостью гринвичского меридиана. Ось $O\xi_0$ перпендикулярна первым двум так, чтобы система осей была правой.

В точке вылета поместим систему координат $\xi^1\eta^1\zeta^1$, ось которой направим вверх по радиусу-вектору $\bar{R}$, ось $O\eta_1$ — в плоскости ортодромического меридиана по направлению к ортодромическому полюсу.

Геоцентрическая система координат $\xi^1\eta^1\zeta^1$ определяет, таким образом, ортодромию как центральное сечение земного сфероида, проведенное через две заданные точки либо через одну точку, заданную геоцентрическими координатами, и азимут. Выбранную ортодромию будем характеризовать следующей таблицей направляющих косинусов между осями $\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $\xi^1\eta^1\zeta^1$:

$$\left.\begin{aligned}
n_{11} &= \cos\lambda_0\cdot\sin N_0 + \sin\lambda_0\cdot\sin\varphi_0\cdot\sin N_0,\\
n_{12} &= \cos\varphi_0\cdot\sin N_0,\\
n_{13} &= \sin\varphi_0\cdot\cos\lambda_0\cdot\sin N_0 - \sin\lambda_0\cdot\cos N_0,\\
n_{21} &= \sin\lambda_0\cdot\sin\varphi_0\cdot\cos N_0 - \cos\lambda_0\cdot\sin N_0,\\
n_{22} &= \cos\varphi_0\cdot\sin N_0,\\
n_{23} &= \cos\lambda_0\cdot\sin\varphi_0\cdot\cos N_0 + \sin\lambda_0\cdot\sin N_0,\\
n_{31} &= \sin\lambda_0\cdot\cos\varphi_0;\ n_{32} = -\sin\varphi_0;\ n_{33} = \cos\lambda_0\cdot\cos\varphi_0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

λ_0 — долгота точки старта, φ_0 — геоцентрическая широта точки старта, N_0 — угол ортодромии в точке старта. Свяжем с текущими координатами летательного аппарата геоцентрическую систему отсчета $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Взаимное расположение систем $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $\xi^1\eta^1\zeta^1$ определим таблицей направляющих косинусов, составленной по геоцентрическим ортодромическим координатам.

Перемножая матрицы, записанные в табл. 1 и 2, получим направляющие косинусы между осями: $\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $\xi_1\eta_1\zeta_1$

Таблица 1

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ^1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
η^1	n_{21}	n_{22}	n_{23}
ζ^1	n_{31}	n_{32}	n_{33}

Таблица 2

	ξ^1	η^1	ζ^1
ξ_1	$\cos\Lambda_1$	0	$-\sin\Lambda_1$
η_1	$\sin\Lambda_1\cdot\sin\Phi_1$	$\cos\Phi_1$	$\cos\Lambda_1\cdot\sin\Phi_1$
ζ_1	$\sin\Lambda_1\cos\Phi_1$	$-\sin\Phi_1$	$\cos\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1$

Таблица 3

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ_1	m_{11}	m_{12}	m_{13}
η_1	m_{21}	m_{22}	m_{23}
ζ_1	m_{31}	m_{32}	m_{33}

Таблица 4

	ξ_1	η_1	ζ_1
ξ	1	0	$-\nu_2$
η	0	1	ν_1
ζ	ν_2	$-\nu_1$	1

$$\left.\begin{aligned}
m_{11} &= n_{11}\cos\Lambda_1 - n_{31}\sin\Lambda_1,\\
m_{12} &= n_{12}\cdot\cos\Lambda_1 - n_{32}\sin\Lambda_1,\\
m_{13} &= n_{13}\cdot\cos\Lambda_1 - n_{33}\sin\Lambda_1,\\
m_{21} &= n_{11}\cdot\sin\Lambda_1\cdot\sin\Phi_1 + n_{21}\cos\Phi_1 + n_{31}\cdot\sin\Phi_1\cdot\cos\Lambda_1,\\
m_{22} &= n_{12}\cdot\sin\Lambda_1\cdot\sin\Phi_1 + n_{22}\cos\Phi_1 + n_{32}\cdot\sin\Phi_1\cdot\cos\Lambda_1,\\
m_{23} &= n_{13}\cdot\sin\Lambda_1\cdot\sin\Phi_1 + n_{23}\cos\Phi_1 + n_{33}\cdot\sin\Phi_1\cdot\cos\Lambda_1,\\
m_{31} &= n_{11}\cdot\sin\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1 - n_{21}\cdot\sin\Phi_1 + n_{31}\cos\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1,\\
m_{32} &= n_{12}\cdot\sin\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1 - n_{22}\cdot\sin\Phi_1 + n_{32}\cos\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1,\\
m_{33} &= n_{13}\cdot\sin\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1 - n_{23}\cdot\sin\Phi_1 + n_{33}\cdot\cos\Lambda_1\cdot\cos\Phi_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Будем считать, что на борту летательного аппарата материализована геодезическая вертикаль, с которой совпадает одна из осей системы координат $\xi\eta\zeta$. Обозначив углы уклонения геодезической вертикали от направления радиуса вектора в плоскости ортодромического меридиана через ν_1 и в направлении, перпендикулярном плоскости меридиана через ν_2, получим связь между системами координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $\xi\eta\zeta$ в виде табл. 4, записанной с учетом малости углов ν_1 и ν_2. Углы ν_1 и ν_2 находятся из простых соотношений

$$\nu_1 = \mu\cdot\cos N,\ \nu_2 = -\mu\cdot\sin N, \qquad (3)$$

связывающих значения этих углов с геометрической формой Земли.

Функция $\mu(B)$ дается с помощью тригонометрического ряда [1], причем нам достаточно удержать первых два члена:

$$\mu = c \cdot \sin 2B - \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin 4B, \tag{4}$$

где

$c = (a^2 - b^2) \quad (a^2 + b^2)^{-1}$, a, b — полуоси эллипсоида Красовского, B — геодезическая широта.

За координаты летательного аппарата в этом случае целесообразно принять следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \nu_1, \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \frac{\nu_2}{\cos \Phi}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выбор ортодромических координат в форме (5) оправдан тем, что пересчет координат из географической системы в ортодромическую и наоборот может быть осуществлен посредством использования матричных преобразований вида (1) и (2). Это можно показать. Пусть летательный аппарат находится в точке с геодезическими координатами B и L и ортодромическими Φ и Λ. Им соответствуют геоцентрические координаты $\varphi = B - \mu$; $\lambda = L$; $\Phi_1 = \Phi - \nu_1$; $\Lambda_1 = \Lambda - \nu_2 \quad (\cos \Phi)^{-1}$.

Подставляя последнее в правые части формул (1) и (2), получим две системы тождества. Например, для m_{32} будем иметь

$$-(n_{12} \cdot \sin \Lambda_1 \cos \Phi_1 - n_{22} \sin \Phi_1 + n_{32} \cdot \cos \Lambda_1 \cdot \cos \Phi_1) = \sin \varphi.$$

Подставляя в последнее выражение Φ и Λ вместо Φ_1 и Λ_1 и учитывая (1), (2), (3), получим с точностью до членов C^2

$$-\left[n_{12} \cdot \sin\left(\Lambda_1 + \frac{\nu_2}{\cos \Phi}\right) \cdot \cos(\Phi_1 + \nu_1) - n_{22} \sin(\Phi_1 + \nu_1) + \right.$$

$$\left. + n_{32} \cos\left(\Lambda_1 + \frac{\nu_2}{\cos \Phi}\right) \cdot \cos(\Phi_1 + \nu_1)\right] = \sin \varphi + \mu \cdot \cos \varphi = \sin B.$$

Основное уравнение инерциальной навигации, записанное применительно к системе координат $\xi\eta\zeta$, имеет вид [2, 3]

$$\left.\begin{aligned} j_\xi &= V'_\xi + V_\zeta \Omega_\eta - V_\eta \Omega_\zeta - f_\xi, \\ j_\eta &= V'_\eta + V_\xi \Omega_\zeta - V_\zeta \Omega_\xi - f_\eta, \\ j_\zeta &= V'_\zeta + V_\eta \Omega_\xi - V_\xi \Omega_\eta - f_\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ, V_ξ, V_η, V_ζ — составляющие абсолютной угловой и линейной скоростей радиуса-вектора. Вводя в рассмотрение относительные линейные скорости объекта и используя табл. 4, можно показать, что проекции абсолютной угловой и линейной скоростей на оси $\xi\eta\zeta$ будут равны:

$$\Omega_\xi = -\frac{W_{\eta 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \sin N - \left(-\frac{W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 - \omega \sin \varphi\right) \nu_2;$$

$$\Omega_\eta = \frac{W_{\xi 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N + \left(-\frac{W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \varphi_1 - \omega \cdot \sin \varphi\right) \nu_1;$$

$$\Omega_\zeta = -\frac{W_{\xi 1}}{R} \operatorname{tg} \Phi_1 - \omega \sin \varphi + \left(\frac{W_{\eta 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin N\right) \nu_2 -$$

$$- \left(\frac{W_{\xi 1}}{R} + \omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos N\right) \nu_1; \tag{7}$$

$$V_\xi = W_{\xi 1} - V_\zeta \nu_2 + R\,\omega \cos\varphi \cdot \cos N;$$

$$V_\eta = W_{\eta 1} + V_\zeta \nu_1 - R\omega \cdot \cos\varphi \cdot \sin N;$$

$$V_\zeta = W_{\nu 1} + W_{\xi 1}\cdot \nu_2 - W_{\eta 1}\nu_1 + R\omega\cos\varphi\cdot\cos N\cdot\nu_2 + R\omega\cdot\cos\varphi\cdot\sin N\cdot\nu_1,$$

а для системы (6) будем иметь

$$j_\xi = W'_{\xi 1} - (V_{\zeta 1}\cdot\nu_2)' + \frac{W_{\xi 1}V_{\zeta 1}}{R} + \frac{W_{\eta 1}W_{\xi 1}}{R}\operatorname{tg}\Phi_1 +$$

$$2V_{\zeta 1}\cdot\omega\cdot\cos\varphi\cdot\cos N + 2W_{\eta 1}\cdot\omega\cdot\sin\varphi - R\omega^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sin N +$$

$$+\left(\frac{W_{\zeta 1}^2}{R} + \frac{W_{\eta 1}^2}{R} + 2W_{\xi 1}\omega\cdot\cos\varphi\cdot\cos N -\right.$$

$$\left.-2W_{\eta 1}\cdot\omega\cdot\cos\varphi\cdot\sin N + R\omega^2\cos^2\varphi\right)\nu_2 - f_\xi. \qquad (8)$$

$$j_\eta = W'_{\eta 1} + (V_\zeta\cdot\nu_1)' - \frac{W_{\xi 1}^2}{R}\operatorname{tg}\Phi_1 + \frac{V_{\zeta 1}W_{\eta 1}}{R} -$$

$$-2W_{\xi 1}\,\omega\cdot\sin\varphi - 2V_{\zeta 1}\,\omega\cdot\cos\varphi\cdot\sin N - R\omega^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos N -$$

$$-\left(\frac{W_{\xi 1}^2}{R} + \frac{W_{\eta 1}^2}{R} + 2W_{\xi 1}\,\omega\cdot\cos\varphi\cdot\cos N - 2W_{\eta 1}\,\omega\cdot\cos\varphi\cdot\sin N +\right.$$

$$\left.+R\omega^2\cos^2\varphi\right)\nu_1 - f_\eta.$$

$$j_\zeta = V'_\zeta + (W_{\xi 1}\cdot\nu_2)' - (W_{\eta 1}\cdot\nu_1)' - \frac{W_{\eta 1}^2}{R} - \frac{W_{\xi 1}^2}{R} +$$

$$+2W_{\eta 1}\,\omega\cdot\cos\varphi\cdot\sin N - 2W_{\xi 1}\,\omega\cdot\cos\varphi\cdot\cos N - R\omega^2\cos^2\varphi +$$

$$+\left(\frac{W_{\xi 1}W_{\zeta 1}}{R} + \frac{W_{\xi 1}W_{\eta 1}}{R}\operatorname{tg}\Phi_2 + 2W_{\eta 1}\,\omega\cdot\sin\varphi + 2V_{\zeta 1}\,\omega\cos\varphi\cos N -\right.$$

$$\left.-R\omega^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\sin N\right)\nu_2 - \left(\frac{W_{\eta 1}W_{\zeta 1}}{R} - \frac{W_{\xi 1}^2}{R}\operatorname{tg}\Phi_1 -\right.$$

$$\left.-2W_{\xi 1}\,\omega\sin\varphi - 2V_{\zeta 1}\,\omega\cos\varphi\cdot\sin N - R\omega^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos N\right)\nu_1 - f_\zeta.$$

Перейдем в (7) и (8) к геодезическим координатам B и Φ, а также к составляющим относительной скорости в системе $\xi\eta\zeta$, для чего в (8) подставим следующие соответствия:

$$\Phi_1 = \Phi - \nu_1;\quad \varphi = B - \mu;\quad W_{\xi 1} = W_\xi + V_\zeta\nu_2;$$

$$W_{\eta 1} = W_\eta - V_\zeta\cdot\nu_1;\quad V_{\zeta 1} = V_\zeta - W_\xi\nu_2 + W_\eta\cdot\nu_1,$$

из которых три последние оправданы естественным допущением $V_\zeta\nu_{1;2} = V_{\zeta 1}\cdot\nu_{1;2}$; $W_\eta\nu_{1;2} = W_{\eta 1}\nu_{1;2}$. Также учитывается, что для гироплатформы, ориентированной по вектору силы тяжести, справедливы соотношения:

$$-R\omega^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sin N + R\omega^2\cos^2\varphi\,\nu_2 - f_\zeta = 0,$$

$$-R\omega^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos N - R\omega^2\cos^2\varphi\cdot\nu_1 - f_\eta = 0.$$

После несложных преобразований получим для показаний горизонтальных акселерометров и сигналов коррекции платформы

$$j_\xi = W'_\xi + \frac{W_\xi W_\eta}{R}\operatorname{tg}\Phi + 2W_\eta\omega\cdot\sin B + 2V_\zeta\omega\cdot\cos B\cdot\cos N,$$

$$j_\eta = W'_\eta - \frac{W_\xi^2}{R}\operatorname{tg}\Phi - 2W_\xi\omega\sin B - 2V_\zeta\omega\cos B\cdot\sin N,$$

$$\Omega_\xi = -\frac{W_\eta}{R} + \omega\cdot\cos B\cdot\sin N + \frac{W_\xi}{R}\operatorname{tg}\Phi\nu_2, \tag{9}$$

$$\Omega_\eta = \frac{W_\xi}{R} + \omega\cdot\cos B\cdot\cos N - \frac{W_\xi}{R}\operatorname{tg}\Phi\nu_1,$$

$$\Omega_\zeta = -\frac{W_\xi}{R}\operatorname{tg}\Phi - \omega\sin B - \frac{W_\eta}{R}\nu_2,$$

где $R = a(1 - c\cdot\sin^2 B)$.

Если пренебречь третьим слагаемым в выражениях для Ω_ξ; Ω_η; Ω_ζ, что справедливо при полете вдоль ортодромии ($\Phi = \nu_1$; $W_\eta = 0$), то можно считать, что соотношения (9) записаны для шара геодезических широт B. Шаровая структура формул (9) и отмеченная выше возможность использования сферических формул для преобразования координат Φ и Λ в B и L дают основание рассматривать работу инерциальной вертикали на сфере переменного радиуса, полученной как сферическое изображение эллипсоида на шар. Поэтому для анализа методических ошибок более простых алгоритмов (отсутствие поворотных ускорений, содержащих V_ζ, постоянное значение R и т. д.) можно использовать общие дифференциальные уравнения ошибки инерциальной системы (2) для шарообразной Земли. В этом случае в правые части уравнений для ошибки в построении вертикали необходимо подставить разности методических точных формул (9) и принятых в вычислителе, понимая эти разности как ошибки, эквивалентные ошибкам акселерометров и уходам стабилизирующих гироскопов. При реализации в вычислителе полных формул (9) с переменным R правые части уравнений ошибки равны нулю. Следовательно, в полете платформа будет ориентирована по геодезической вертикали.

Непрерывное счисление координат по уравнениям:

$$\Lambda_{\text{сч}} = \Lambda_0 + \int_0^t \frac{1}{R\cos\Phi}\left\{\int_0^t W'_\xi dt\right\}dt; \quad \Phi_{\text{сч}} = \Phi_0 - \int_0^t \frac{1}{R}\left\{\int_0^t W'_\eta dt\right\}dt;$$

$$W'_\xi = j_\xi - \frac{W_\xi W_\eta}{R}\operatorname{tg}\Phi - 2W_\eta\,\omega\cdot\sin B - 2V_\zeta\,\omega\cos B\cos N;$$

$$W'_\eta = j_\eta + \frac{W_\xi^2}{R}\operatorname{tg}\Phi + 2W_\xi\,\omega\sin B + 2V_\zeta\,\omega\cos B\cdot\sin N,$$

казалось бы, должно давать значения Φ и Λ. Однако этого не происходит. Действительно, выражения для относительных ускорений W'_ξ и W'_η из (8) для случая горизонтального полета будут иметь вид

$$W'_\xi = W'_{\xi 1} + 2C^2 W_{\eta 0}\cos B\cdot\sin 2B\cdot\sin N\cdot B' - C^2 W_{\eta 0}\sin 2B\,(\sin 2B\cdot\sin N)';$$

$$W'_\eta = W'_{\eta 1} + 2C^2 W_{\eta 0}\cdot\cos B\cdot\sin 2B\cdot\cos N\cdot B' - C^2 W_{\eta 0}\sin 2B\,(\sin 2B\cdot\cos N)'.$$

По-прежнему с точностью до членов C^2 имеем

$$W'_\xi = W'_{\xi 1}; \quad W'_\eta = W'_{\eta 1}.$$

Следовательно, инерциальная система будет счислять геоцентрические координаты Λ_1 и Φ_1. С учетом того, что в месте старта в вычислитель вводятся точные координаты, полная ошибка будет равна

$$\Delta\Phi = c\sin 2B\cdot\cos N - \nu_1^0,$$

$$\Delta\Lambda = -\frac{c\cdot\sin 2B\cdot\sin N}{\cos\Phi}. \tag{10}$$

Методическая ошибка является чисто геометрической. Максимальное значение ее достигает 22 *км*.

Выводы

Если для сфероидальной Земли плоскость ортодромии совпадает с центральным сечением, то пересчет ортодромических координат в форме (5) в геодезические производится по обычным формулам.

Методически точные уравнения инерциального ориентатора допускают сферическое изображение на шар переменного радиуса, то есть могут быть получены из «шаровых формул» заменой геоцентрических координат Φ_1 и φ геодезическими Φ и B. При этом инерциальная система является построителем геодезической вертикали, но имеет ошибку в координате. Простыми поправками могут служить выражения (10), взятые с обратным знаком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Багратуни. Курс сферической геодезии. Изд. географ. литературы, М., 1962.
2. В. Д. Андреев. К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, т. 28, вып. 1, 1964.
3. К. Л. Мак-Клур. Теория инерциальной навигации. «Наука», М., 1964.