

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ЗАЗОРОМ

Ю. М. НЕФЕДОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры гироскопических приборов  
и устройств)

Для механической передачи любого типа характерно наличие зазора между элементами передачи. Влияние зазора на точность работы системы оказывается существенным при небольших (одного порядка с величиной зазора) перемещениях ведущего элемента механической передачи [1]. Знание характеристик вынужденных колебаний системы с учетом нелинейной характеристики типа зазора позволяет качественно и количественно оценить динамическую точность такой системы.

Следящая система с зазором является нелинейной системой первого класса, содержащей в общем случае две нелинейные характеристики, одна из которых представляет собой сложную зависимость от амплитуды и частоты вынужденных колебаний [1]. Структурная схема рассматриваемой следящей системы приведена на рис. 1, а.

Нелинейную характеристику зазора  $x_3 = F_1(x)$  можно описать следующим образом [1]:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= x - x_0 && \text{при } px_3 > 0; \\ F_1(x) &= x + x_0 && \text{при } px_3 < 0; \\ F_1(x) &= \text{const} && \text{при } |x - x_3| < x_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$x_0$  — половина зазора механической передачи, сосредоточенного в одном месте.

Следует заметить, что формулы (1) соответствуют условию неподвижности ведомого элемента (управляемого объекта) во время выбиравания зазора. Это условие для большинства следящих систем является реальным.

Движение вала двигателя следящей системы с учетом только момента инерции управляемого объекта описывается уравнением (рис. 1, а).

$$F_2(p^2 x, px) = \kappa_1 x_2 \quad (2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) px &= \kappa_1 x_2 && \text{при } px_3 = 0, \\ [(T_1 + T_2) p + 1] px &= \kappa_1 x_2 && \text{при } px_3 \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$T_1$  — постоянная времени двигателя следящей системы;

$T_2$  — постоянная времени, пропорциональная моменту инерции управляемого объекта.

Предполагается, что сигнал управления  $x_1$ , который представляет собой вынуждающие колебания системы, меняется по гармоническому закону

$$x_1 = B \sin \omega t.$$

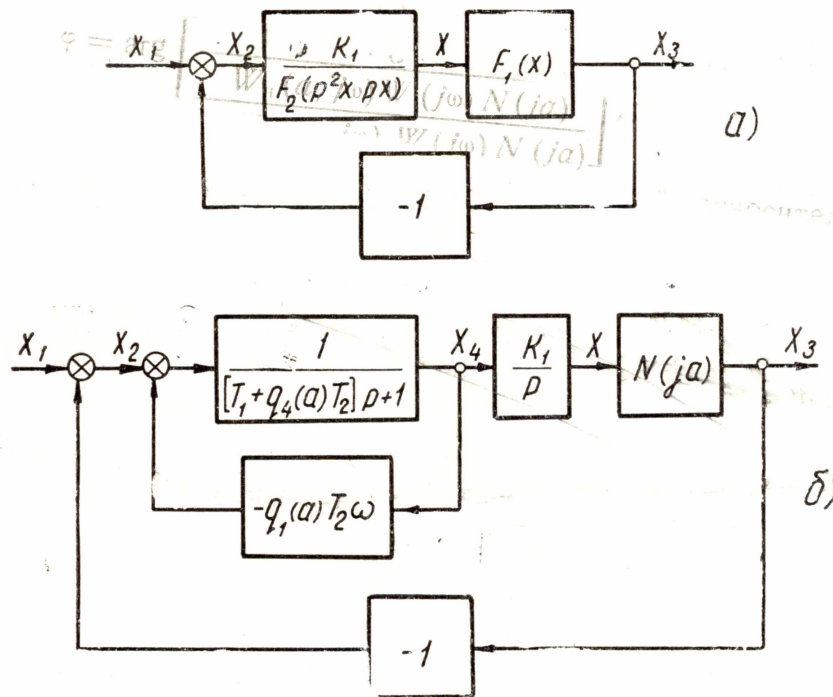


Рис. 1

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного звена  $F_1(x)$  в результате гармонической линеаризации примет следующий вид [2]:

где

$$N(ja) = \kappa_n(a) \cdot e^{j\varphi_n(a)};$$

$$\kappa_n(a) = \sqrt{q^2(a) + q_1^2(a)},$$

$$\varphi_n(a) = \arg \frac{q_1(a)}{q(a)}.$$

(4)

Коэффициенты гармонической линеаризации  $q(a)$  и  $q_1(a)$  для характеристики типа зазора имеют вид

$$\left. \begin{aligned} q(a) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2}{a} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2}{a} \right) \sqrt{\frac{1}{a} \left( 1 - \frac{1}{a} \right)} \right], \\ q_1(a) &= -\frac{4}{\pi a} \left( 1 - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \right\} \text{при } a \geq 1, \quad (5)$$

где  $a = \frac{A}{x_0}$  — относительная амплитуда синусоидального сигнала на входе нелинейного звена  $F_1(x)$ .

Соответственно вводятся следующие обозначения:

$b = \frac{B}{x_0}$  — относительная амплитуда сигнала управления;

$c = \frac{C}{x_0}$  — относительная амплитуда синусоидального выходного сигнала следящей системы.

Для гармонической линейзации нелинейной функции  $F_2(p^2x, px)$  следует воспользоваться следующим соотношением [1]:

$$F_2(p^2x, px) = \left[ \frac{q_3(A, \omega)}{-\omega^2} p^2 + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \right] x, \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_2(A, \omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(-A\omega \sin \omega t, A\omega \cos \omega t) \sin \omega t d\omega t, \\ q_3(A, \omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(-A\omega \sin \omega t, A\omega \cos \omega t) \cos \omega t d\omega t, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

при  $x = A \sin \omega t$ .

Фазовый сдвиг вынужденных колебаний на входе нелинейного звена относительно вынуждающих колебаний системы не учитывается при определении выражения гармонически линейризованной нелинейной функции.

Таким образом, на основании уравнений (3), (6) и (7) после гармонической линейризации нелинейную функцию (2) можно записать в следующем виде:

$$\{ [T_1 + q_4(a) T_2] p + 1 + q_1(a) T_2 \omega \} px = \kappa_1 x, \quad (8)$$

где

$$q_4(a) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2}{a} \right) - 2 \left( 1 - \frac{2}{a} \right) \sqrt{\frac{1}{a} \left( 1 - \frac{1}{a} \right)} \right],$$

при  $a \geq 1$ .

Выражения (4) и (8) позволяют представить структурную схему следящей системы с зазором в виде двухконтурной системы (рис. 1, б). Причем внутренняя обратная связь является положительной, так как коэффициент гармонической линейризации  $q_1(a) < 0$  при  $a \geq 1$ . Кроме того, коэффициент усиления внутренней обратной связи зависит от частоты вынуждающих колебаний.

В рассматриваемой следящей системе частотные характеристики внутреннего контура представляют собой нелинейную зависимость от величины амплитуды синусоидального сигнала на выходе нелинейного звена  $N(ja)$ , то есть обе нелинейные зависимости определяются одной и той же координатой  $x$ . Таким образом, для последующих построений характеристик вынужденных колебаний следящей системы можно воспользоваться методикой, данной в работе [3], основанной на методе гармонической линейризации и методе логарифмических частотных характеристик.

Для удобства выполнения всех построений эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного звена  $N(ja)$ , согласно уравнению (4), представляется графически (рис. 2, а).

Вторая нелинейная зависимость на основании уравнения (8) и рис. 1, б может быть изображена в виде следующей частотной передаточной функции:

$$W_n(a, j\omega) = \frac{x_4(a, j\omega)}{x_2(a, j\omega)} \frac{1}{[T_1 + q_4(a) T_2] j\omega + 1 + q_1(a) T_2 \omega}. \quad (9)$$

Логарифмические частотные характеристики, соответствующие уравнению (9), для некоторых фиксированных значений амплитуды  $a$  приведены на рис. 2, б. Принятая методика предполагает определение

характеристик вынужденных колебаний на входе нелинейного звена в зависимости от вынуждающих колебаний системы с тем, чтобы, опираясь на эту зависимость, определить характеристики вынужденных

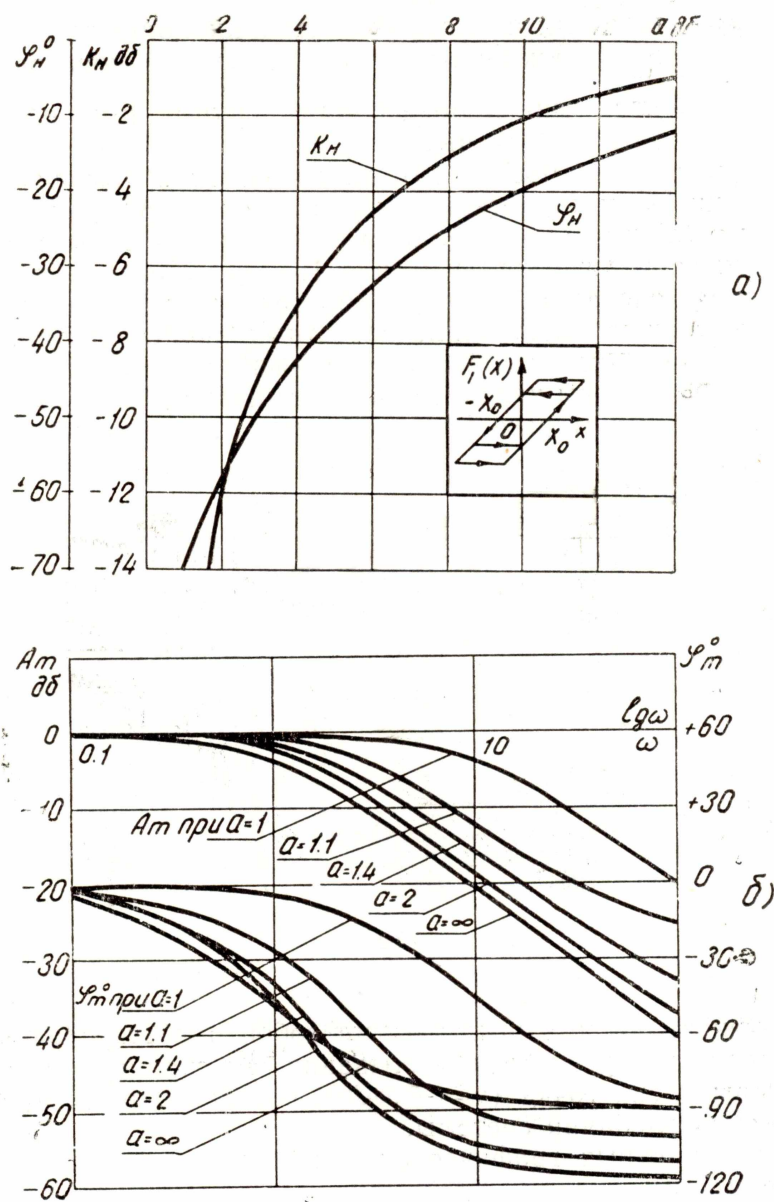


Рис. 2

колебаний выходной координаты системы при различных фиксированных значениях амплитуды вынуждающих колебаний.

Для этого, в первую очередь, строится семейство логарифмических амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик вынуждающих колебаний системы при различных фиксированных значениях амплитуды  $a$ . Указанные построения производятся на основании следующих выражений (рис. 1, в):

$$b = \left| \frac{N(j\omega)}{W_n(a, j\omega) W(j\omega) N(j\omega)} \right| a, \quad (10)$$

$$\varphi = \arg \left[ \frac{N(ja)}{\frac{W_n(a, j\omega) W(j\omega) N(ja)}{1 + W_n(a, j\omega) W(j\omega) N(ja)}} \right], \quad (10a)$$

где  $\varphi$  — фазовый сдвиг вынуждающих колебаний относительно вынужденных на входе нелинейного звена;

$W(j\omega) = \frac{\kappa_1}{j\omega}$  — частотная передаточная функция линейной части следящей системы.

Построения зависимости (10) выполняются с помощью номограммы замыкания [4] и характеристик рис. 2, а и б. В плоскости параметров  $b$  (а) и  $\varphi$  (а) в зависимости от  $\omega$  на основании частотного критерия устойчивости периодического решения [5] выделяется область, в которой нелинейная следящая система работает в режиме захватывания и в которой имеет смысл построение частотных характеристик.

Далее определяются обратные зависимости  $a(b, \omega)$  и  $\varphi(b, \omega)$ . На рис. 3 представлены характеристики амплитуды вынужденных колебаний  $a(\omega)$  при некоторых фиксированных значениях амплитуды  $b$ .

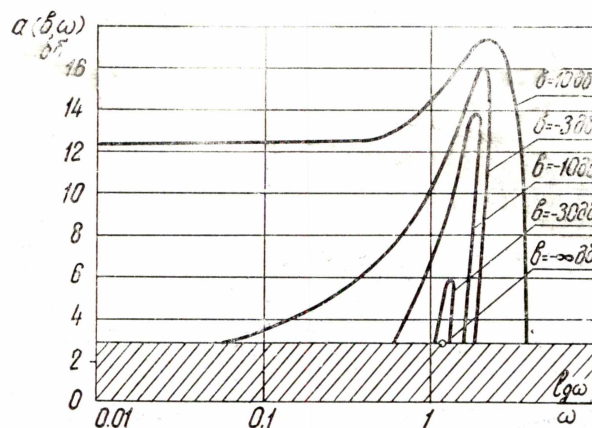


Рис. 3

Заштрихованная область представляет собой область сложных колебаний, в которой нет режима захватывания. На границе области сложных колебаний выделена точка ( $b = -\infty\delta b$ ), которая определяет амплитуду и частоту автоколебаний системы.

Путем несложных графических построений определяются следующие зависимости:

1. Зависимость  $\frac{a}{b}(\omega)$  при некоторых фиксированных значениях  $b$ ,

при этом зависимость  $\varphi(\omega)$  для тех же значений  $b$  остается без изменения.

2. Зависимость  $N(b, j\omega)$ . Эта зависимость определяется в виде характеристик  $\kappa_n(j\omega)$  и  $\varphi_n(j\omega)$  для различных фиксированных значений  $b$  на основании характеристик  $a(b, \omega)$  и  $N(ja)$ .

Наконец, определяется семейство характеристик вынужденных колебаний выходной координаты системы для выбранных значений амплитуды  $b$ . В этих построениях используются полученные зависимости  $\frac{x}{x_1}(b, j\omega)$  и  $N(b, j\omega) = \frac{x_3}{x}(b, j\omega)$ , их произведение дает харак-

теристики вынужденных колебаний замкнутой системы  $\frac{x_3}{x_1}(b, j\omega)$

в виде семейства амплитудно-частотных характеристик  $A_m(\omega)$  и фазо-частотных характеристик  $\varphi_m(\omega)$  для различных значений  $b$ . Результаты построений приведены на рис. 4. Построенные характеристики соответствуют области режима захватывания, точками обозначены границы этой области. Из сравнения кривых рис. 4 видно, что с уменьше-

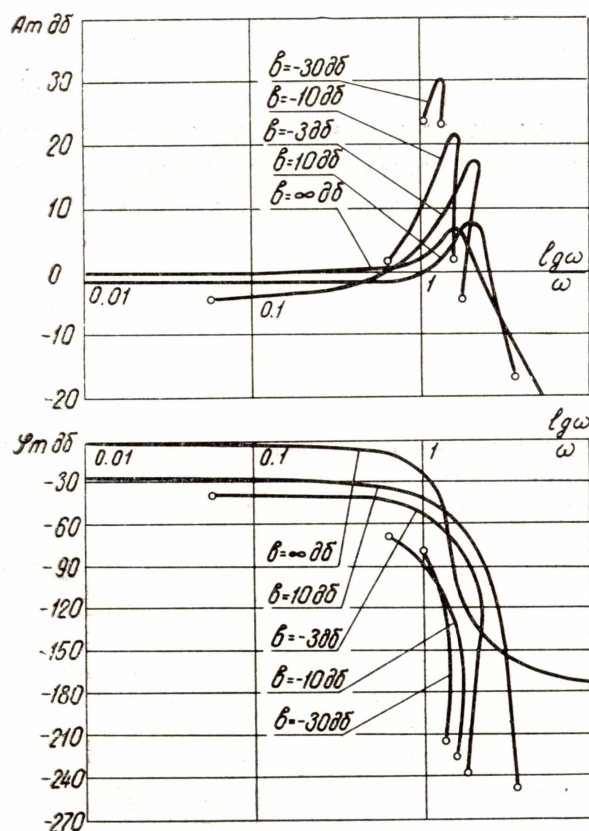


Рис. 4

нием амплитуды  $b$  амплитуда вынужденных колебаний увеличивается, то есть отношение  $\frac{c}{b}$  ( $b, j\omega$ ) увеличивается, а частотная область возможного режима захватывания уменьшается.

#### Выводы

1. Следящая система с зазором может иметь области режима захватывания и режима сложных колебаний.
2. При определенных значениях амплитуды вынуждающих колебаний в системе возможен скачкообразный резонанс.
3. С уменьшением амплитуды вынуждающих колебаний резонансная амплитуда вынужденных колебаний системы увеличивается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», М., 1966.
2. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
3. Ю. М. Нефедов. Влияние люфта в исполнительном элементе системы стабилизации летательного аппарата на амплитуду вынужденных колебаний. Тр. ЛИАП, вып. 49, 1966.
4. Н. Т. Кузовков. Теория автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.
5. Дж. Телер, М. Пестель. Анализ и расчет нелинейных систем автоматического регулирования. «Энергия», М., 1964.