ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 192 1975

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВОПРОСУ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В. И. КОПЫТОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры гироскопических приборов и устройств)

Известно, что реакция нелинейной системы даже на внешнее гармоническое воздействие носит весьма сложный характер. В частности, при частотах, превосходящих «основную» частоту системы, кроме вынужденных колебаний с частотой внешнего воздействия, могут установиться устойчивые колебания с частотой, в целое число раз меньшей частоты внешнего воздействия, — субгармонические колебания [1—9]. Как показывают эксперименты и исследования на электронных моделирующих установок [1—5], возникновение устойчивых субгармонических колебаний характерно для консервативных систем либо для систем с малым демпфированием. Очевидно, в практических случаях весьма важно уметь, хотя бы приближенно, получать граничные значения демпфирования, при которых субгармонические колебания могут иметь место. Актуальность данной задачи определяется тем, что довольно многие современные приборы и комплексы, представляющие некоторые нелинейные системы, в процессе эксплуатации подвергаются воздействию высокочастотной вибрации. Возникновение устойчивых субгармонических колебаний относительно больших амплитуд в данном случае — явление крайне нежелательное, так как снижает точность показаний, надежность работы приборов и т. д.

В работах [7, 8, 9] на примере уравнения Дуффинга при наличии вязкого демпфирования определены субгармонические колебания порядка $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Следует отметить, что аналитическое исследование субгармоник имеет смысл только при вязком демпфировании (трении).

В предлагаемой статье рассматривается данная задача на примере «упругая связь — масса — жесткий ограничитель» при наличии вязкого демпфирования. Решение проводится с помощью метода акад. Б. Г. Галеркина.

Итак, рассмотрим колебательную систему вида (рис. 1), где

x — координата массы m положения статического равновесия системы;

a_0 — расстояние («зазор») от положения статического равновесия до ограничителя;

c — коэффициент жесткости упругой связи;

α — коэффициент сил вязкого демпфирования $(R = \alpha \cdot \dot{x})$;

$Q(t) = H\sin\omega t$ — внешняя периодическая сила частоты ω, действующая на массу m.

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы, представится в виде

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = H\sin\omega t$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x - h\sin\omega t = 0, \tag{1}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad 2\beta = \frac{\alpha}{m}; \quad h = \frac{H}{m}. \tag{2}$$

Условие соприкосновения массы m с ограничителем используем после выбора формы решения. Выбирая решение уравнения (1) в виде (первое приближение метода Б. Г. Галеркина)

$$x = x_0 + a\sin\omega t + a_n \sin\frac{1}{n}(\omega t - \gamma), \tag{3}$$

где x_0 — характеризует равновесное положение системы „упругая связь — масса — ограничитель";

$a\sin\omega t$ — колебания массы m с частотой внешнего воздействия;

$a_n \sin\frac{1}{n}(\omega t - \gamma)$ — субгармонические колебания массы m;

γ — угол сдвига фаз между субгармониками и внешним воздействием.

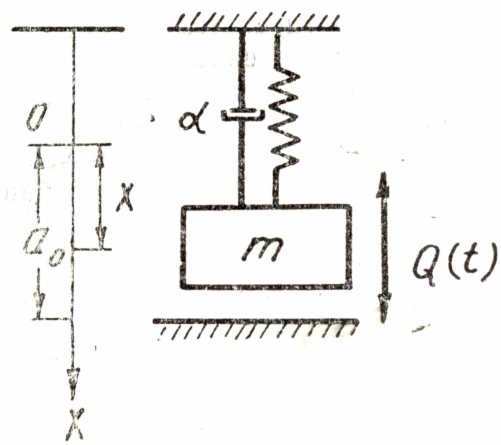

Рис. 1. Механическая колебательная система с жестким ограничителем

Угол сдвига фаз колебаний массы m с частотой внешнего воздействия можно положить равным нулю. Из условия соприкосновения при субгармонических колебаниях массы m с ограничителем имеем

$$x = a_0, \quad \frac{1}{n}(\omega t_1 - \gamma) = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\omega t_1 = n\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right). \tag{4}$$

Тогда решение (3) с учетом (4) запишется в виде

$$a_0 = x_0 + a\sin n\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + a_n, \text{ откуда } x_0 = a_0 - a\sin n\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - a_n.$$

И окончательно решение (3) примет вид

$$x = a_0 + \left[\sin\omega t - \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\right]a + \left[\sin\frac{1}{n}(\omega t - \gamma) - 1\right]a_n. \tag{5}$$

В соответствии с методом акад. Б. Г. Галеркина подставляем данное решение в уравнение (1), умножаем на вариацию δx, интегрируем в пределах от 0 до $\frac{2\pi n}{\omega}$ и результат приравниваем к нулю. Вследствие независимости вариаций δa; δa_n и $\delta\gamma$, после интегрирования получаем систему трех уравнений в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1+2\sin^2 n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]a+2\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot a_n=\\
&\qquad=x_{\text{ст}}+2\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot a_0;\\
&2\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot a+\left(3-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\cdot a_n=2a_0.\\
&\frac{1}{n}\cdot\nu\frac{\omega}{\omega_0}\cdot a_n^2-n\cdot\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot a\cdot a_n+n\cdot\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot\\
&\quad\cdot a_0\cdot a-n\cdot\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\cdot a^2=0,
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

где
$$x_{\text{ст}}=\frac{h}{\omega_0^2}=\frac{H}{c};\qquad \nu=\frac{\beta}{\omega_0}.$$

Полученная система — система нелинейных уравнений относительно a; a_n и γ. Точное решение ее крайне затруднительно. Поэтому мы ограничимся частной задачей, а именно найдем условия, определяющие верхнюю границу значений сил сопротивления, при которых возможны субгармонические колебания.

Итак, будем считать, что $n=2;\ 4;\ 6;\ \ldots$, то есть рассмотрим субгармоники четного порядка. Кроме того, как показывают эксперименты, субгармонические колебания по фазе «отстают» на угол $\frac{\pi}{2}$ от внешнего воздействия. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)&=\sin n\pi=0;\\
\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)&=\cos n\pi=1.
\end{aligned}\right\}\ \text{при}\ n=2;\ 4;\ 6;\ldots.\tag{7}$$

и система уравнений (6) примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)a=x_{\text{ст}}.\\
&\left(3-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)a_n=2a_0;\\
&\frac{1}{n}\nu\cdot\frac{\omega}{\omega_0}\cdot a_n^2-n\cdot a\cdot a_n+n\cdot a_0\cdot a=0.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Из первых двух уравнений получаем безразмерные выражения амплитуд колебаний с частотой внешней силы и субгармоник

$$\frac{a}{x_{\text{ст}}}=\frac{1}{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}-1};\qquad \frac{a_n}{x_{\text{ст}}}=\frac{2n^2\cdot\dfrac{a_0}{x_{\text{ст}}}}{3n^2-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.\tag{9}$$

Из третьего уравнения определяем границу значений коэффициента ν демпфирования, при которых возможны субгармонические колебания. Имеем

$$a_n=\frac{na\pm\sqrt{n^2a^2-4\nu\dfrac{\omega}{\omega_0}\cdot a_0\cdot a}}{\dfrac{2}{n}\nu\cdot\dfrac{\omega}{\omega_0}}.$$

Отсюда следует, что a_n может иметь действительные значения только тогда, когда подкоренное выражение будет положительным, то есть

$$n^2 a^2 - 4\nu \frac{\omega}{\omega_0} \cdot a_0 \cdot a \geqslant 0,$$

что выполняется, если

$$\nu \leqslant \frac{n^2 a}{4a_0 \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}. \qquad (10)$$

Или в безразмерных величинах с учетом (9)

$$\nu \leqslant \frac{n^2}{4 \frac{a_0}{x_{\text{ст}}} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)}. \qquad (11)$$

Выражения (10) или (11) дают верхнюю границу значений коэффициента сопротивления ν, при которых субгармонические колебания возможны. Пример:

$$\text{пусть } \frac{a_0}{x_{\text{ст}}} = 1; \quad n = 2, \text{ тогда при } \frac{\omega}{\omega_0} = 2, \ \nu \leqslant \frac{1}{9} \approx 0{,}11;$$

$$\text{при } \frac{\omega}{\omega_0} = 2{,}5, \ \nu \leqslant 0{,}051.$$

Выводы

В колебательной системе «упругая связь — масса — ограничитель» при заданном параметре ν коэффициента вязкого демпфирования возможность существования устойчивых субгармонических колебаний более высокого порядка, чем 2, 3, 4,... резко уменьшается.

Неравенства (10) или (11) позволяют дать количественную оценку параметра ν, что очень важно при исследовании динамики систем на электронных моделирующих установках.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. М. Алабужев, В. И. Копытов, Ю. П. Цивинский. Исследование колебательной системы с двумя степенями свободы с жестким ограничителем. Механизмы и машины ударного, вращательного и вращательно-ударного действия. Сб. тр., вып. 1, Новосибирск, 1963.
2. П. М. Алабужев, В. И. Копытов. К вопросу аналитического исследования колебаний корпуса отбойных и бурильных молотков. Изв. вузов — Горный журнал, № 8, 1962.
3. В. Ф. Горбунов, А. В. Триханов. Исследование виброизоляции рукояток ручных пневматических молотков методом математического моделирования. Изв. ТПИ, т. 146, 1966.
4. Ю. И. Иориш. Защита самолетного оборудования от вибрации. Оборонгиз, 1949.
5. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси. О явлениях резонанса n-го рода. Т. II, в. 7—8, 1932.

   Об устойчивости колебаний при резонансе n-рода. ЖТФ, т. IV, в. 1, 1934.
6. Н. Минорский. Современные направления в нелинейной механике. Проблемы механики, сб. статей, ИЛ, 1955.
7. Дж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. ИЛ, 1952.
8. Т. Хаяси. Вынужденные колебания в нелинейных системах. ИЛ, 1957.
9. Дж. Хейл. Колебания в нелинейных системах. «Мир», 1966.