

УЧЕТ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ
В ТОКОВИХРЕВОМ ДАТЧИКЕ ЩЕЛЕВОГО ТИПА

Д. В. МИЛЯЕВ, В. К. ЖУКОВ

(Представлена научно-техническим семинаром факультета автоматике
и вычислительной техники)

Бесконтактный контроль геометрических размеров и электропроводности изделий успешно осуществляется методом вихревых токов. Принцип действия приборов, работающих по этому методу, описан в литературе довольно подробно. Нас интересует контроль размеров цилиндрических немагнитных изделий. В таких случаях наряду с проходными датчиками в настоящее время используются токовихревые датчики с кольцевым магнитопроводом [1].

Существующая теория щелевого датчика с кольцевым магнитопроводом не учитывает потери энергии в магнитопроводе, а также явления возникновения вихревых токов в обмотке датчика и явления, связанные с этими потерями энергии. На высоких частотах названные потери могут быть значительные, что, несомненно, приводит к расхождению экспериментальных и теоретических данных.

Определим потери энергии электромагнитного поля в обмотке датчика. Для этого представим обмотку датчика в виде витка бесконечной длины, к концам которого приложено напряжение синусоидальной формы. Переменное магнитное поле, создаваемое протекающим по витку током, индуцирует в обмотке вихревые токи. Напряженность магнитного поля и плотность тока в витке определяются, решая систему уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt}. \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Совместное решение (1), (2), (3), (4) приводит к волновому уравнению

$$\nabla^2 \vec{H} - i\omega\gamma\mu\mu_0 \vec{H} = 0, \quad (5)$$

в котором γ , μ — удельная электропроводность и магнитная проницаемость материала обмотки датчика (для меди $\mu = 1$). Для решения (5) необходимо воспользоваться цилиндрической системой коор-

динат. В цилиндрической системе координат волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{H}}{dr} - i \omega \gamma \mu_0 \dot{H} = 0. \quad (6)$$

Интегралом уравнения (6) является функция Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$\dot{H} = \dot{C}_1 J_0(x \sqrt{-i}) + \dot{C}_2 N_0(x \sqrt{-i}), \quad (7)$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 — постоянные интегрирования, $x \sqrt{-i}$ — аргумент функций, $x = \kappa r$, $\kappa = \sqrt{\omega \gamma \mu_0}$.

Плотность тока $\delta = -\frac{d \dot{H}}{dr}$ в соответствии с (7) равна

$$\delta = \kappa \sqrt{-i} [\dot{C}_1 J_1(x \sqrt{-i}) + \dot{C}_2 N_1(x \sqrt{-i})]. \quad (8)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий: на наружной поверхности витка напряженность магнитного поля равна нулю, т. е.

$$\dot{C}_1 J_0(x \sqrt{-i}) + \dot{C}_2 N_0(x \sqrt{-i}) = 0, \quad (9)$$

на внутренней поверхности напряженность определяется током в витке

$$\dot{H} = \dot{H}_s = \dot{C}_1 J_0(x \sqrt{-i}) + \dot{C}_2 N_0(x \sqrt{-i}). \quad (10)$$

В последних выражениях

$x_1 = \kappa r_1$, r_1 — внутренний радиус витка,

$x_2 = \kappa r_2$, r_2 — наружный радиус витка, $H_s = I \omega$, I — ток в витке.

Из (9) и (10) при их совместном решении находятся \dot{C}_1 и \dot{C}_2 . После определения постоянных интегрирования для напряженности магнитного поля и плотности тока найдем

$$\dot{H} = \sqrt{2} I \frac{N_0(x_2 \sqrt{-i}) J_0(x \sqrt{-i}) - J_0(x_2 \sqrt{-i}) N_0(x \sqrt{-i})}{J_0(x_1 \sqrt{-i}) N_0(x_2 \sqrt{-i}) - N_0(x_1 \sqrt{-i}) J_0(x_2 \sqrt{-i})}. \quad (11)$$

$$\delta = \kappa \sqrt{-i} \sqrt{2} I \frac{N_0(x_2 \sqrt{-i}) J_0(x \sqrt{-i}) - J_0(x_2 \sqrt{-i}) N_0(x \sqrt{-i})}{J_0(x_1 \sqrt{-i}) N_0(x_2 \sqrt{-i}) - N_0(x_1 \sqrt{-i}) J_0(x_2 \sqrt{-i})}. \quad (12)$$

Согласно уравнению электродинамики

$$\dot{U}_{(t)} = \int_s \frac{\delta}{\gamma} ds + \frac{d}{dt} \int_{\sigma} B d\sigma, \quad (13)$$

где s и σ — площадь и сечение витка соответственно. Подставляя в (13) выражения (11) и (12) и беря интеграл, получим

$$\dot{U}_{(t)} = \sqrt{2} i \omega \mu_0 \pi r_1^2 I + \frac{2 \sqrt{2} \pi \sqrt{-i} x_1 I}{\gamma} \frac{N_0(x_2 \sqrt{-i}) J_1(x_1 \sqrt{-i}) - J_0(x_1 \sqrt{-i}) N_0(x_2 \sqrt{-i}) -$$

С другой стороны,

$$\rightarrow \frac{-J_0(x_2 \sqrt{-i}) N_1(x_1 \sqrt{-i})}{-N_0(x_1 \sqrt{-i}) J_0(x_2 \sqrt{-i})}. \quad (14)$$

$$\dot{U}_{(t)} = I Z_{06} \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), находим выражение для полного сопротивления обмотки датчика

$$Z_{06} = i \omega \mu_0 \pi r_1^2 \sqrt{2} + \frac{2 \sqrt{2} \pi \sqrt{-i} x_1}{\gamma} \times \\ \times \frac{N_0(x_2 \sqrt{-i}) J_1(x_1 \sqrt{-i}) - J_0(x_2 \sqrt{-i}) N_1(x_1 \sqrt{-i})}{J_0(x_1 \sqrt{-i}) N_0(x_2 \sqrt{-i}) - N_0(x_1 \sqrt{-i}) J_0(x_2 \sqrt{-i})}. \quad (15)$$

Определим далее потери энергии в ферритовом магнитопроводе. В общем случае потери энергии складываются из потерь на гистерезис и вихревые токи. Потери на перемагничивание, т. е. потери на гистерезис, могут быть учтены введением комплексной абсолютной магнитной проницаемости:

$$\dot{\mu}_c = \frac{\dot{B}_m}{H_m} = \mu_c e^{-i\delta}. \quad (17)$$

Волновое уравнение для ферромагнитной среды в случае цилиндрической волны с учетом (17) получает вид

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{H}}{dr} - i \omega \gamma_c \dot{\mu}_c \dot{H} = 0, \quad (18)$$

где γ_c — электропроводность ферромагнетика.
Введем обозначения

$$-i \omega \gamma_c \dot{\mu}_c = \kappa^2, \\ |\kappa| = \sqrt{\omega \gamma_c |\mu_c|} = M, \\ \Theta = \frac{1}{2} \delta + \frac{\pi}{4}, \quad (19)$$

с учетом которых волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dr \dot{H}}{dr} + (M e^{-i\Theta})^2 \dot{H} = 0. \quad (20)$$

Общим решением этого уравнения являются функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$\dot{H} = \dot{C}_1 J_0(\kappa r) + B N_0(\kappa r). \quad (21)$$

Из граничных условий следует, что $H = 0$ при $r = 0$ и $H = H_0$ при $r = a$, поэтому $\dot{B} = 0$

$$\dot{C} = \frac{\dot{H}_0}{J_0(\kappa a)}. \quad (22)$$

Распределение напряженности магнитного поля по радиусу

$$\overline{\dot{H}} = \overline{I}_z \dot{H}_0 \frac{J_0(M e^{-i\Theta} \cdot r)}{J_0(M e^{-i\Theta} a)}. \quad (23)$$

Согласно первому уравнению Максвелла

$$\overline{\dot{E}} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \overline{\dot{H}} \quad (24)$$

или с учетом (24)

$$\overline{\dot{E}} = -\overline{I}_\varphi \frac{1}{\gamma_c} \dot{H}_0 M e^{-i\Theta} \frac{J_1(M e^{-i\Theta} r)}{J_0(M e^{-i\Theta} a)}. \quad (25)$$

Потери в сердечнике определяются потоком электромагнитной волны, который проникает через боковую поверхность. Поток электромагнитной энергии или вектор Умова—Пойнтинга, средний за период

в случае синусоидального изменения во времени составляющих электромагнитного поля, определяется векторным произведением

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} [\vec{E} \vec{H}^*], \quad (26)$$

в котором H^* — сопряженный комплекс напряженности магнитного поля.

Мощность, поглощаемая ферритовым сердечником, определяется полным потоком электромагнитной энергии через боковую поверхность, т. е.

$$\dot{P}_{\text{ф.с}} = \int_s \vec{\Pi} \vec{ds}. \quad (27)$$

Для инженерных расчетов удобно ввести выражение мощности, выделяющейся в сердечнике на единице его длины

$$\vec{\Pi} = -\vec{1}_r \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\gamma_c} M e^{-i\theta} \frac{J_1(M e^{-i\theta} r) J_0(M e^{i\theta} r)}{J_0(M e^{+i\theta} a) J_0(M e^{-i\theta} a)}. \quad (28)$$

Знак минус в общем выражении потока указывает на движение волны от большего радиуса к меньшему. Поскольку знак нас не интересует, его можно опустить

$$\dot{P}_{\text{ф.с}} = \frac{H_0^2}{\gamma_c} \pi a M e^{-i\theta} \frac{J_1(M e^{-i\theta} a)}{J_0(M e^{-i\theta} a)}. \quad (29)$$

Часть энергии, подводимой к датчику, расходуется в ферритовом сердечнике, т. е.

$$\dot{P}_{\text{ф.с}} = I^2 \dot{Z}_{\text{ф.с}}. \quad (30)$$

Из равенства правых частей выражений (29) и (30) следует

$$\dot{Z}_{\text{ф.с}} = \frac{2\omega_{10}^2 \pi a}{\gamma_c} M e^{-i\theta} \frac{J_1(M e^{-i\theta} a)}{J_0(M e^{-i\theta} a)}. \quad (31)$$

где ω_{10} — число витков на единице длины датчика, а $Z_{\text{ф.с}}$ — сопротивление сердечника на единицу длины.

Полученное выражение учитывает все потери, имеющие место в сердечнике, поэтому оно может быть использовано для проведения детального анализа процессов, происходящих в токовихревом датчике щелевого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Жуков, В. Э. Дрейзин, И. Г. Лещенко. Индукционно-импедансный датчик с кольцевым магнитопроводом «Дефектоскопия», № 2, 1966.