ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 194 1972

К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ИЗДЕЛИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТОКОВИХРЕВЫХ ДАТЧИКОВ ЩЕЛЕВОГО ТИПА

Д. В. МИЛЯЕВ, В. К. ЖУКОВ

(Представлена научно-техническим семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

В статье [1], помещенной в данном сборнике, рассмотрены часть вопросов по теории щелевого датчика. В случае контроля размеров или электропроводности изделий необходимо иметь связь между параметрами датчика и измеряемым параметром. Чаще всего находится зависимость полного сопротивления датчика от параметров изделия и датчика, а также и от частоты возбуждающего поля. Данная задача подробно рассмотрена многими авторами для датчиков проходного типа (длинный соленоид). Для решения аналогичной задачи для щелевого датчика необходимо определить: а) потери электромагнитной энергии в контролируемом цилиндрическом изделии; б) потери энергии в воздушном зазоре.

При этом полагаем:

1. Поле в зазоре однородно.
2. Магнитопровод у зазора имеет прямоугольное сечение с длинной стороной параллельной оси изделия, $в \gg a$.

Для решения данной задачи воспользуемся волновыми уравнениями для векторных потенциалов в воздухе и металле изделия

$$\nabla^2 \bar{\dot{A}}_2 = 0, \tag{1}$$

$$\nabla^2 \bar{\dot{A}}_1 + \kappa^2 \bar{\dot{A}}_1 = 0, \tag{2}$$

где $\bar{\dot{A}}_2$ — вектор-потенциал вихревых токов в воздухе,

$\bar{\dot{A}}_1$ — вектор-потенциал вихревых токов в металле,

$$\kappa = \sqrt{-i\omega\gamma_0 \mu_0}, \tag{3}$$

γ_0, μ_0 — электропроводность и магнитная проницаемость материала изделия.

Наиболее просто решения волновых уравнений запишутся в цилиндрической системе координат (r, φ, z). Пусть оси координат выбраны так, что

$$\bar{\dot{A}}_1 = \bar{1}_z \dot{A}_1 \text{ и } \bar{\dot{A}}_2 = \bar{1}_z \dot{A}_r, \tag{4}$$

кроме того, пусть $b \gg a$. Волновое уравнение для воздуха

$$\frac{\partial^2 \dot{A}^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{A}_2}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{5}$$

для металла

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{A}_1}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 \dot{A}_1 = 0. \tag{6}$$

Общие решения полученных уравнений имеют вид

$$\dot{A}_1 = (\dot{N}\varphi_1 \cos\lambda\varphi + \dot{N}_{\varphi_1} \sin\lambda\varphi)\,[\dot{C}_1 J_n(\kappa r) + \dot{C}_1' Y_n(\kappa r)], \tag{7}$$

$$\dot{A}_2 = (\dot{N}\varphi_2 \cos\lambda\varphi + \dot{N}_{\varphi_2}' \sin\lambda\varphi)\,[\dot{C}_2 r^n + \dot{C}_2' r^{-n}] + \dot{A}_0, \tag{8}$$

где

$\dot{N}_{\varphi_1}$; $\dot{N}_{\varphi_2}$; $\dot{N}_{\varphi_1}'$; $\dot{N}_{\varphi_2}'$; $\dot{C}_1$; $\dot{C}_2$; $\dot{C}_1'$; $\dot{C}_2'$ — постоянные интегрирования,

$\dot{A}_0$ — вектор-потенциал возбуждающего магнитного поля, $J_n(\kappa r)$, $Y_n(\kappa r)$ — функции Бесселя.

Так как первичное поле не содержит $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi \ldots$ и т. д., то и результирующее поле, т. е. суммарное поле вихревых токов и возбуждающее поле, должны иметь только $\cos\varphi$. Кроме того λ — целое число, так как $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ — четные функции, следовательно, $\dot{N}_{\varphi 1}' = \dot{N}_{\varphi 2}' = 0$. В сплошном изотропном цилиндре отраженной волны нет, следует положить $\dot{C}_1^1 = 0$. Поле вихревых токов в воздухе на бесконечности равно нулю, необходимо принять $\dot{C}_2 = 0$. В результате для решения волновых уравнений

$$\dot{A}_1 = \dot{N}_{\varphi_1} C_1 J_1(\kappa r)\cos\varphi, \tag{9}$$

$$\dot{A}_2 = \dot{N}_{\varphi_2} \dot{C}_2' r^{-1}\cos\varphi + \dot{A}_0. \tag{10}$$

Вектор $\overline{\dot{A}}_0$ связан с вектором магнитной индукции $\overline{\dot{B}}_0$ возбуждающего поля соотношением

$$\operatorname{rot}\overline{\dot{A}}_0 = \overline{\dot{B}}_0. \tag{11}$$

В цилиндрической системе координат $\operatorname{rot}\dot{A}$

$$\overline{1}_r \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_0}{\partial \varphi} - \overline{1}_\varphi \frac{\partial \dot{A}_0}{\partial r} = \overline{\dot{B}}_0, \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\overline{\dot{B}}_0 = \overline{1}_r \dot{B}_0 \sin\varphi - \overline{1}_\varphi \dot{B}_0 \cos\varphi. \tag{13}$$

Из (12) и (13)

$$\dot{A}_0 = -\dot{B}_0 r\cos\varphi. \tag{14}$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо воспользоваться равенствами

$$\overline{\dot{A}}_1 = \overline{\dot{A}}_2, \quad \frac{\partial \dot{A}_1}{\partial r} = \frac{\partial A_2}{\partial r}, \tag{15}$$

которые справедливы при $r = r_0$, т. е. на границе раздела двух сред. После решения системы уравнений определяются постоянные

$$\dot{N}_2 = \dot{B}_0 r_0^2 \frac{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)}{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}, \tag{16}$$

$$\dot{N}_1 = \frac{-2\dot{B}_0 r_0}{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}. \tag{17}$$

Вектор-потенциалы в воздухе и в металле с учетом (16) и (17) перепишутся

$$\dot{\bar{A}}_1 = \bar{1}_z \frac{-2\dot{B}_0 r_0 J_1(\kappa r_0)\cos\varphi}{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}, \tag{18}$$

$$\dot{\bar{A}}_2 = \bar{1}_z \frac{\dot{B}_0 r_0^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)]\cdot r^{-1}}{[\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)]}\cos\varphi + \dot{\bar{A}}_0. \tag{19}$$

От вектор-потенциалов необходимо перейти к составляющим электромагнитного поля: напряженности магнитного и электрического полей. Как известно,

$$\dot{H} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\dot{\bar{A}}, \tag{20}$$

$$\dot{\bar{E}} = -i\omega\dot{\bar{A}}. \tag{21}$$

Подставляя выражение для вектор-потенциалов (20) и (21) и проведя необходимые операции, можно получить распределение E и H в воздухе и металле:

$$\dot{\bar{E}}_1 = \bar{1}_z \frac{2i\omega\dot{B}_0 r_0 J_1(\kappa r_0)}{J_1(\kappa r_0) + \kappa r_0 J_1'(\kappa r_0)}\cos\varphi, \tag{22}$$

$$\dot{\bar{E}}_2 = \bar{1}_z \left\{\frac{-i\omega\dot{B}_0 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)]\, r^{-1} r_0^2}{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}\cos\varphi - i\omega\dot{A}_0\right\}, \tag{23}$$

$$\dot{\bar{H}}_1 = \bar{1}_r \frac{2\dot{B}_0 r_0 J_1(\kappa r_0)\sin\varphi}{\mu_0 r [J_1(\kappa r_0) + \kappa r_0) J_1'(\kappa r_0)} + \bar{1}_\varphi \frac{2\dot{B}_0 r_0 \kappa J_1'(\kappa r_0)\cos\varphi}{\mu_0 [J_1(\kappa r_0) + \kappa r_0 J_1'(\kappa r)]}, \tag{24}$$

$$\dot{\bar{H}}_2 = \bar{1}_r \left\{\frac{\dot{B}_0}{\mu_0}\sin\varphi \; \frac{\dot{B}_0 r_0^2 [\kappa r_0 J_1(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)}{\mu_0 r^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}\sin\varphi\right\} + \rightarrow$$

$$\rightarrow + \bar{1}_\varphi \left\{\frac{\dot{B}_0}{\mu_0}\cos\varphi + \frac{\dot{B}_0 r_0^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)]}{\mu_0 r^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)]}\cos\varphi\right\}. \tag{25}$$

Потери электромагнитной энергии в металле, как и ранее, определяются через удельный поток энергии

$$\dot{\bar{\Pi}}_{\text{из}} = \frac{1}{2}[\dot{\bar{E}}_1 \dot{\bar{H}}_1^*]. \tag{26}$$

Мощность, поглощаемая контролируемым изделием, находится, как и в предыдущем случае, т. е. вначале определяют поток энергии при $r = r_0$ и далее этот поток интегрируется по боковой поверхности цилиндра, так как только через эту поверхность электромагнитное поле проникает внутрь цилиндра.

$$P_{\text{из}} = \int_s \dot{\bar{\Pi}}_{\text{из}}\, \bar{ds}. \tag{27}$$

Но, с другой стороны,

$$P_{\text{из}} = I^2 z_{\text{из}}, \tag{28}$$

где $z_{\text{из}}$ — электрическое сопротивление цилиндра, характеризующее потери энергии в нем.

Интегрируя выражение (28) и приравнивая его к (29), можно получить электрическое сопротивление

$$z_{\text{из}} = \pi\omega\mu_0 w_{10}^2 r_0^2 \left\{\left[\frac{2\,\mathrm{ber}_2(\kappa r_0)\,\mathrm{bei}(\kappa r_0) - 2\,\mathrm{bei}_2(\kappa r_0)\,\mathrm{ber}(\kappa r_0)}{\mathrm{ber}^2\kappa r_0 + \mathrm{bei}^2\kappa r_0}\right] + \right.$$

$$\left. \rightarrow + i\left[\frac{\mathrm{ber}^2(\kappa r_0) + \mathrm{bei}^2(\kappa r_0) - \mathrm{ber}_2^2(\kappa r_0) - \mathrm{bei}_2^2(\kappa r_0)}{\mathrm{ber}^2(\kappa r_0) + \mathrm{bei}^2(\kappa r_0)}\right]\right\}. \tag{29}$$

В последнее выражение введены так называемые функции Кельвина.

Принятое допущение, что вектор-потенциал в воздушном зазоре имеет только составляющую, справедливо лишь в случае, если полюса ферромагнитного сердечника имеют прямоугольное сечение и один из размеров больше другого. Следовательно, в зазоре распространяются две плоские волны. Составляющие поля E_2 и H_2, найденные ранее, необходимо переписать для прямоугольной системы координат, выбранной таким образом, что оси z обеих систем совпадают, а ось x направлена по линии $\varphi = 0$.

Используя формулы преобразования координат, распределение напряженностей в воздухе можно переписать в прямоугольной системе.

Кроме того, определим потери в воздушном зазоре при отсутствии в зазоре контролируемого изделия. Для чего в выражениях для напряженностей поля положим $r = 0$, после чего получаем

$$\dot{\overline{H}}_2 = \overline{J}\,\frac{B_0}{\mu_0}, \tag{30}$$

$$\dot{\overline{E}}_2 = \overline{\kappa} i\omega B_0 x. \tag{31}$$

Далее необходимо найти удельный поток энергии, как

$$\Pi_{\text{в.з}} = \frac{1}{2}\,[E_2 \overset{*}{H_2}]. \tag{32}$$

Подставляя (30) и (31) в (32) и учитывая, что произведение сопряженных комплексных величин равно квадрату модуля комплексного числа, получим удельный поток

$$\Pi_{\text{в.з}} = \frac{1}{2}\,i\omega\,\frac{B_0^2}{\mu_0}\,x,$$

который необходимо определить при $x = \dfrac{в}{2}$.

Мощность, поглощаемая зазором,

$$P_{\text{в.з}} = 2\int_0^a \Pi_{\text{в.з}} \cdot dz.$$

С другой стороны,

$$P_{\text{в.з}} = I^2 z_{\text{в.з}},$$

где $z_{\text{в.з}}$ — полное сопротивление воздушного зазора, следовательно,

$$z_{\text{в.з}} = \frac{i\omega B_0^2 b \cdot a}{2\mu_0 I^2}.$$

По закону полного тока

$$B_0 = I w_{10} \mu_0,$$

тогда выражение для полного сопротивления воздушного зазора будет иметь вид

$$z_{\text{в.з}} = i\omega\mu_0 b \cdot a w_{10}^2.$$

Суммарные потери в токовихревом датчике щелевого типа при отсутствии контролируемого изделия характеризуются сопротивлением

$$\dot{z}_0 = z_{в.з} + z_{ф.с} + z_{об.}$$

Относительное же изменение полного сопротивления датчика в присутствии изделия определяется как отношение $z_{из}/z_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Миляев, В. К. Жуков. Учет потерь электромагнитной энергии в токовихревом датчике щелевого типа (статья помещена в данном сборнике).