

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЦВМ ПРИ ПОЛУЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ
ИЗУЧЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В. Д. ДЕЛЬ, Г. Д. ДЕЛЬ

(Представлена кафедрой сопротивления материалов)

В связи с тем, что аналитическое и экспериментальное определение напряжений в пластической области зачастую невозможно, все большее применение находят полуэкспериментальные методы [1, 2, 3]. Определение напряжений этими методами связано с численным интегрированием дифференциальных уравнений равновесия. В связи с этим является перспективным использование в этой области современных средств вычислительной техники.

В настоящей работе ставится задача разработки методики исследования плоского напряженного состояния в пластической области с применением ЭЦВМ. Задача решается на основе метода определения напряжений по распределению твердости и поперечной деформации [3].

Для определения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в общем случае располагаем следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 3\sigma; \\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x; \quad \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 &= \sigma_i^2; \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для решения ее необходимо знать величину гидростатического давления σ .

В случае плоского напряженного состояния

$$\sigma = \sim \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{l_i} \cdot l_z. \quad (2)$$

Входящие в это выражение интенсивности напряжения σ_i и деформаций e_i определяются в предположении о единой кривой течения по твердости, поперечная деформация — в предположении об ее однородности

$$l_z = \ln \frac{h}{h_0}.$$

Здесь h_0 и h — поперечный размер соответственно до и после деформирования.

Число уравнений в системе (1) больше числа неизвестных, поэтому возможны различные методики ее решения. При выборе методики определяющими являются надежность граничных условий, необходимых для расчета, точность определения экспериментальных данных и эффективность использования вычислительной машины.

Сравнительный анализ методик расчета производился применительно к радиальной осадке диска. Осадке подвергался диск из ст. 3 диаметром 160 мм и толщиной 50 мм. На рис. 1 изображена четверть деформированного диска.

Граница BC свободна от нагрузок, прямые OA и AB являются отрезками осей симметрии. На образец нанесена сетка с шагом 5 мм, в узлах которой измерялись твердость и величина поперечной деформации.

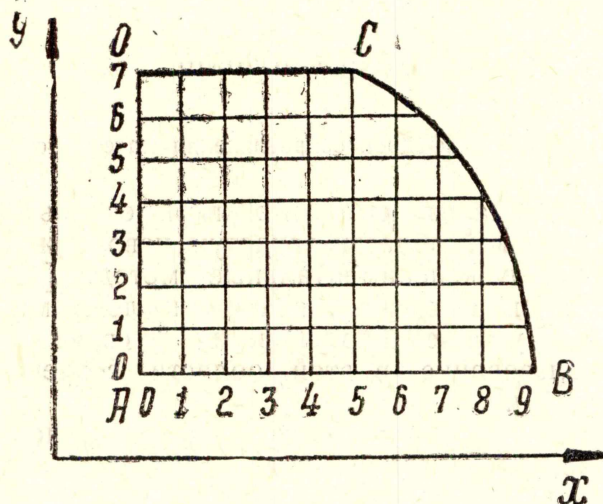


Рис. 1

По этим данным определяются величины, необходимые для вычисления гидростатического давления.

Определим напряжения в узлах сетки.

На осях симметрии $\tau_{xy} = 0$, поэтому σ_x и σ_y могут быть определены совместным решением двух первых уравнений системы (1). Это дает граничные условия для расчета.

Поскольку приведенная выше система насчитывает четыре уравнения при трех неизвестных, возможны четыре пути решения (число сочетаний из четырех по три). Анализ показал, что наиболее приемлем из них следующий.

Используем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0; \\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 &= \sigma_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для узла с координатами $k-1, l$ первое уравнение в конечных разностях запишется следующим образом:

$$\frac{(\sigma_x)_{k-1, l+1} - (\sigma_x)_{k-1, l-1}}{2\Delta} + \frac{(\tau_{xy})_{k, l} - (\tau_{xy})_{k-2, l}}{2\Delta} = 0.$$

Отсюда

$$(\tau_{xy})_{k,l} = (\tau_{xy})_{k-2,l} - (\sigma_x)_{k-1,l+1} + (\sigma_x)_{k-1,l-1}.$$

Так как в точках, симметричных относительно оси симметрии, касательные напряжения равны по величине, но противоположны по знаку, получим для узлов первого ряда

$$(\tau_{xy})_{1,l} = \frac{-(\sigma_x)_{0,l+1} + (\sigma_x)_{0,l-1}}{2}.$$

Из второго уравнения

$$(\sigma_y)_{k,l} = (\sigma_y)_{k-2,l} - (\tau_{xy})_{k-1,l+1} + (\tau_{xy})_{k-1,l-1}.$$

σ_x — определяется теперь из третьего уравнения.

Описанная методика сравнительно просто переводится на машинный язык. Наряду с колоссальной экономией времени и повышением точности, достоинством машинного метода решения здесь является исключение случайных ошибок, неизбежных при ручном счете, а также исключения субъективного фактора при расчетах.

По изложенной методике рассчитывались напряжения при радиальном сжатии диска на 10%. Вблизи горизонтальной оси симметрии умножение эпюры σ_y на толщину диска с достаточной точностью давало величину деформирующего усилия. Однако по мере приближения к контактной площадке погрешность определения σ_y быстро возрастала. Это объясняется, во-первых, влиянием трения в контакте, нарушающего однородность поперечной деформации, и, во-вторых, накоплением ошибки в ходе численного интегрирования.

При меньших деформациях влияние трения сказывается меньше, поэтому удается оценить напряжения с большей точностью. Однако при малых деформациях (до 5—7%) значительная часть сечения деформируется упруго, поэтому изложенная методика здесь неприемлема.

Предлагается следующая методика.

Если обозначить полуразность главных напряжений в точке через τ

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

то для напряжений в любой точке можно записать [4]

$$\sigma_x = \frac{3}{2}\sigma + \tau \cdot \cos 2\vartheta; \quad \sigma_y = \frac{3}{2}\sigma - \tau \cdot \cos 2\vartheta; \quad \tau_{xy} = \tau \cdot \sin 2\vartheta, \quad (4)$$

где ϑ — угол между направлением σ_1 и осью x .

Гидростатическое давление рассчитывается описанным выше способом. Совместным решением двух первых уравнений системы (1) относительно главных напряжений получаем

$$\tau = \sigma_i \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e_z}{e_i} \right)^2}.$$

Подставляя (4) в дифференциальные уравнения, находим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{2\tau} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sin 2\vartheta - \frac{3}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos 2\vartheta + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{1}{2\tau} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cos 2\vartheta + \frac{3}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \sin 2\vartheta + \frac{\partial \tau}{\partial x} \right).$$

В конечных разностях полученные выражения запишутся так:

$$\vartheta_{\kappa,l} = \vartheta_{\kappa,l-2} + \frac{1}{2\tau_{\kappa,l-1}} \left[\frac{3}{2} (\sigma_{\kappa,l} - \sigma_{\kappa,l-2}) \sin 2\vartheta_{\kappa,l-1} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} (\sigma_{\kappa+1,l-1} - \sigma_{\kappa-1,l-1}) \cdot \cos 2\vartheta_{\kappa,l-1} + \tau_{\kappa+1,l-1} - \tau_{\kappa-1,l-1} \right]. \quad (5)$$

$$\vartheta_{\kappa,l} = \vartheta_{\kappa-2,l} - \frac{1}{2\tau_{\kappa-1,l}} \left[\frac{3}{2} (\sigma_{\kappa-1,l+1} - \sigma_{\kappa-1,l-1}) \cdot \cos 2\vartheta_{\kappa-1,l} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (\sigma_{\kappa,l} - \sigma_{\kappa-2,l}) \sin 2\vartheta_{\kappa-1,l} + \tau_{\kappa-1,l+1} - \tau_{\kappa-1,l-1} \right]. \quad (6)$$

Учитывая, что в точках, симметричных относительно оси симметрии, ϑ равны по величине, но противоположны по знаку, получаем из (5) для точек первого столбца

$$\vartheta_{\kappa,1} = \frac{1}{4\tau_{\kappa,0}} \left[-\frac{3}{2} (\sigma_{\kappa+1,0} - \sigma_{\kappa-1,0}) + \tau_{\kappa+1,0} - \tau_{\kappa-1,0} \right]. \quad (7)$$

Данная методика легко поддается автоматизации. Апробирована она на следующем эксперименте:

Диск прежних размеров сжат в радиальном направлении на 5%. Индикатором измерена поперечная деформация Δh в узлах сетки. Твердость измерялась на процессе Бринелля шариком диаметром 10 мм под нагрузкой 3 т. Точки измерений твердости в различных четвертях диска выбирались так, чтобы, сведенные в одной четверти, они давали твердость во всех узлах сетки. На левой половине рис. 2 показано рас-

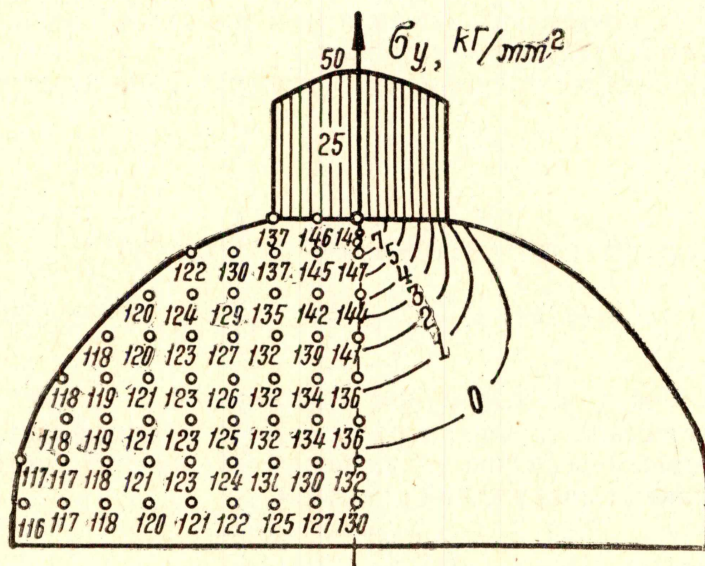


Рис. 2

пределение твердости по сечению диска, на правой — линии равных поперечных деформаций e_z (в %).

Для уменьшения влияния трения эксперимент проводился со смазкой контактной поверхности.

Расчет напряжений производился на ЭЦВМ «Минск-1». Полученная эпюра сжимающих напряжений σ_y в контакте приведена на рис. 2. Площадь этой эпюры, помноженная на толщину образца, дает величину

сжимающего усилия с ошибкой около 5%. Касательные напряжения в контакте близки к нулю.

Блок-схема решения изображена на рис. 3.

Таким образом, исходными данными для расчета являются лишь результаты эксперимента. Все вычисления и промежуточные проверки выполняет машина.

После вычисления e_z , σ и τ рассчитываются значения ϑ сначала в узлах первого столбца по выражению (7). Затем по выражению (5) машина последовательно рассчитывает ϑ в узлах рядов сетки вплоть

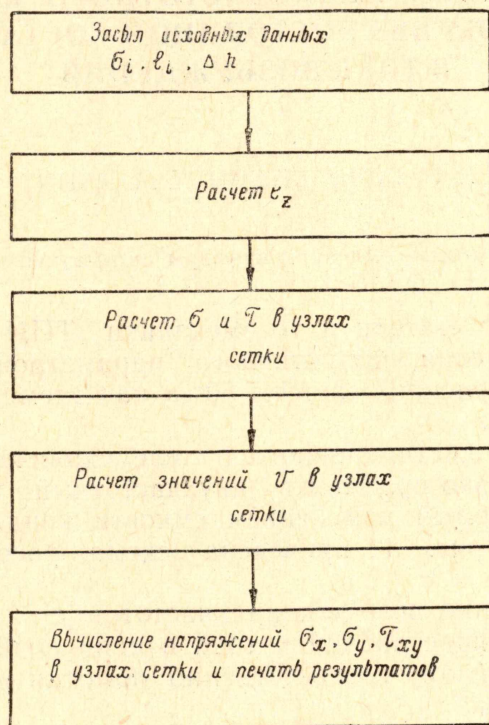


Рис. 3

до контактной площадки и по (6) определяет ϑ у контактной площадки. Теперь по рассчитанным σ , τ и ϑ вычисляются напряжения в узлах сетки.

Предлагаемая методика позволяет определить напряжения вдоль любого луча, если известно направление главных напряжений хотя бы в одной его точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. G. Thomsen and J. T. Lapsley. Experimental Stress Determination within a Metal during Plastic Flow, Proceeding Soc. Exp. Stress Analysis, 11, 1954.
2. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. Исследование упруго-пластических задач методом фотоупругости. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Механика твердого тела. Изд. АН СССР, М., 1966.
3. Г. Д. Дель. Определение напряженного состояния в пластической области по распределению твердости. Труды институтов Госкомитета стандартов, мер и измерительных приборов. Л., 1967.
4. В. И. Федосьев. Сопротивление материалов. Изд-во «Наука», М., 1964.