ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 196 1969

К ВОПРОСУ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЧАСТНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВ

Е. А. ПИСАРЕВ

(Представлена Советом НИИ гидрогеологии и инженерной геологии)

Общеизвестно, что большая часть расчетных схем оценки устойчивости различных сооружений разработана применительно к изотропным массивам грунтов. Тем не менее грунтовый массив сравнительно редко может рассматриваться как однородный и обычно ему присуще слоистое строение. В случае, когда свойства грунтовых слоев различны, используемые для оценки устойчивости сооружений в изотропных грунтах расчетные схемы не являются безоговорочно применимыми и требуют введения соответствующей корректуры, которая практически сводится к замене неоднородных слоев эквивалентной по свойствам единой грунтовой толщей. Обычно при оценке устойчивости оснований сооружений [5] или расчетах устойчивости откосов [6] в слоистых грунтах отмеченная замена, как правило, сводится к известной операции вычисления средневзвешенных значений показателей инженерно-геологических свойств грунтовой толщи с использованием формулы:

$$\bar{x}_{\text{взв}} = \frac{h_1 \cdot \bar{x}_1 + h_2 \cdot \bar{x}_2 + \ldots\ldots + h_\kappa \cdot \bar{x}_\kappa}{\sum\limits_{i=1}^{\kappa} h_i},$$

где $\bar{x}_{\text{взв}}$ — средневзвешенное значение показателя;

$\bar{x}_i$ — частное среднее значение показателя i-го слоя;

h_i — элемент грунтового массива (мощность i-го слоя; длина i-го участка линии скольжения, площадь эпюры тех или иных напряжений в i-м слое грунта и т. п.);

κ — число слоев.

Отмеченная формула применяется только в случае, когда характеристики свойств грунтов для каждого из κ-слоев определены в одном и том же объеме n_i, и при этом не наблюдается существенного расхождения в их случайном рассеянии, что довольно редко встречается в практике инженерно-геологических исследований. Чаще всего имеет место обратный случай, когда частные характеристики того или иного свойства получены для разных слоев грунтов не в одинаковых объемах и с разной «точностью». При этом «неравноточность» рассматриваемых наблюдений вызывается не только различными аналитическими погрешностями измерений и неодинаковым их числом, но и качественным отличием грунтовых слоев. Ниже для этого случая предлагается методика статистической обработки инженерно-геологических показателей свойств грунтов, которая, как известно, является важным моментом в процессе получения расчетных параметров, необходимых при оценке устойчивости различных сооружений [2, 4].

Пусть имеется κ-слойный грунтовый массив. В пределах каждого относительно однородного слоя тот или иной показатель свойства грунта распределен с заданной степенью надежности по нормальному закону со средним значением x_i и дисперсией S_i^2. Кроме того, соблюдается условие, что частные значения этой характеристики не связаны с параметрами пространства. «Неравноточность» рассматриваемых наблюдений в данном случае можно оценивать путем сравнений дисперсий S_i^2. При двухслойном сложении грунтового массива дисперсии сопоставляются с помощью общеизвестного F-критерия Р. Фишера:

$$F = \frac{S^2_{\max}}{S^2_{\min}}, \tag{1}$$

где $S^2_{\max}$ — максимальное значение дисперсии;

$S^2_{\min}$ — минимальное значение дисперсии.

Вычисленные значения F необходимо сравнить с табличным $F_{\gamma}, N-1$ [1], где N — число определений, а γ — уровень значимости. При $F < F_{\gamma}, N-1$ гипотезу об однородности двух дисперсий можно считать при принятом уровне значимости γ достаточно правдоподобной [3]. В противном случае дисперсии неравноценны и уже совершенно излишне говорить о «равноточности» наблюдений. При $\kappa > 2$ возникает необходимость оценивать „неравноточность" каких-либо показателей путем сравнения нескольких дисперсий $S_1^2, S_2^2, \ldots\ldots, S_\kappa^2$, полученных для каждого слоя по n_i определениям. Вначале вычисляем среднюю взвешенную дисперсию:

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\kappa} n_i S_i^2}{N}, \tag{2}$$

где $N = \sum\limits_{i=1}^{\kappa} n_i$, и находим статистический критерий

$$B = \frac{2.303}{C} \cdot \left(N \cdot \lg \bar{S}^2 - \sum_{i=1}^{\kappa} n_i \cdot \lg S_i^2 \right), \tag{3}$$

причем

$$C = 1 + \frac{1}{3(\kappa - 1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{1}{n_i} - \frac{1}{N} \right). \tag{4}$$

В работе [3] оговаривается, что величина B распределена приближенно как χ^2 с $\kappa - 1$ степенями свободы, если все $n_i > 2$. Когда вычисленная величина B превосходит табличное значение χ^2_γ, $\kappa - 1$ при выбранном уровне значимости γ, мы отбрасываем гипотезу об однородности дисперсий и считаем, что наши частные характеристики, полученные для различных слоев, «неравноточные».

При доказанной «неравноточности» показателей задача заключается в приведении всех результатов к сравнимому виду. Это позволит в дальнейшем получить необходимые выводы о свойствах всей неоднородной слоистой грунтовой толщи, а точнее, сделает возможным определить надежные обобщенные и расчетные характеристики физико-механических свойств грунтов. Пользуясь методом наименьших квадратов, можно получить выражение для оценки среднего взвешенного значения неравноточных измерений показателей инженерно-геологических свойств для K-слойного массива грунта. Согласно этому методу в качестве взвешенной средней следует взять такое значение x_i, при котором бы обращалось в минимум следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{\kappa}\left(\frac{x_i - z}{S_i/\sqrt{n_i}}\right)^2 = \text{minimum},$$

где z — оценка средневзвешенного значения показателя. Приравнивая нулю первую производную этого выражения по z, после простых преобразований получим:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{n_i}{S_i^2}\cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{n_i}{S_i^2}}. \tag{5}$$

Из условия минимума выражения

$$\sum_{i=1}^{\kappa}\left(\frac{S_i - S_z}{Si/\sqrt{2n_i}}\right) = \text{minimum}$$

таким же образом можно получить оценку для взвешенного среднего квадратического отклонения S_z;

$$S_z = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{n_i}{S_i}}{\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{n_i}{S_i^2}}. \tag{6}$$

Средняя взвешенная z в нашем случае является случайной величиной и характеризуется своим законом распределения с параметрами Mz (математическое ожидание) и средним квадратичным отклонением $m_z = \frac{S_z}{\sqrt{\kappa}}$. Теперь образуем нормированную величину $t = \frac{z - Mz}{Sz/\sqrt{\kappa}}$, которая, очевидно, должна иметь асимптотическое нормальное распределение, так как все изменения, связанные с «неравноточностью» в структуре показателей свойств грунтов, уже учтены. Тогда доверительные интервалы для Mz можно записать в виде

$$z + t_\gamma \cdot m_z \geqslant Mz \geqslant z - t_\gamma \cdot m_z. \tag{7}$$

Они являются одним из главнейших моментов в процессе получения расчетных показателей инженерно-геологических свойств грунтов [2, 4]. Значения t_γ в формуле (7) табулированы, их можно найти в работе [3].

Для удобства обозначим в формуле (5) и (6) „веса“ $\frac{n_i}{S_i^2}$ величинами λ_i. Тогда эти выражения будут иметь вид:

$$z = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\kappa} \lambda_i \cdot \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i}; \tag{8}$$

$$S_z = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i}. \tag{9}$$

Если, например, принять „вес" λ_j для какого-либо j-го слоя за единицу, т. е.

$$\lambda_j = \frac{n_j}{S_j^2} = 1,$$

то веса для остальных слоев можно вычислить из равенства:

$$\lambda_i = \frac{n_i}{n_j} \cdot \frac{S_j^2}{S_i^2}. \tag{10}$$

Все приведенные выше формулы можно использовать для оценки Mz только лишь в том случае, если между числом определений показателей свойств n_i и размерами элементов слоев грунта h_i существует линейная прямо пропорциональная зависимость, т. е. доли отбора проб для исследований должны быть прямо пропорциональными размерам опробываемых единиц. В противном случае необходим дополнительный учет весового участия каждого слоя в оценке средневзвешенного значения показателя какого-либо свойства массива грунта. Для этого обозначим через u_i величину $\left(\sum_{i=1}^{\kappa} h_i\right)^{-1} \cdot h_i \cdot x_i$, тогда дисперсия u_i-переменной для i-го слоя равна $S_{u_i}^2 = \left(\sum_{i=1}^{\kappa} h_i\right)^{-2} \cdot h_i^2 \cdot S_i^2$.

Здесь h_i — элемент грунтового массива (мощность i-го слоя, длина i-го участка линии скольжения и т. п.). Если же рассматривать весь слоистый массив грунта, то u_i являются также, как и x_i, «неравноточными» случайными величинами со средним значением $\mu = \frac{1}{\kappa} \cdot z$ и стандартом $S_\mu = \frac{1}{\kappa} \cdot S_z$. Используя принцип способа наименьших квадратов, по аналогии с предыдущим нетрудно прийти к формулам для вычисления μ, S_μ и m_μ:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_{u_i} \cdot \overline{u}_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \gamma_{u_i}}; \tag{11}$$

$$S_\mu = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_{u_i} \cdot S_{u_i}}{\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_{u_i}}; \tag{12}$$

$$m_\mu = \frac{S_\mu}{\sqrt{\kappa}}, \qquad (13)$$

где u_i и S_{u_i} — среднее значение и стандарт какого-либо показателя, полученные для i-го слоя.

В формулах (11, 12) величины λ_{u_i} по аналогии с выражением (10) равны:

$$\lambda_{u_i} = \frac{n_i}{n_j} \cdot \frac{S_j^2}{S_i^2} \cdot \frac{h_j^2}{h_i^2}. \qquad (14)$$

Теперь окончательно получим

$$z = \kappa \cdot \mu; \qquad (15)$$

$$S_z = \kappa \cdot S_\mu; \qquad (16)$$

$$m_z = \frac{\kappa \cdot S_\mu}{\sqrt{\kappa}}; \qquad (17)$$

$$\kappa \cdot (\mu + t_\gamma \cdot m_\mu) \geqslant \mathrm{Mz} \geqslant \kappa \cdot (\mu - t_\gamma \cdot m_\mu). \qquad (18)$$

В заключение отметим, что предлагаемая методика может быть использована при определении различных расчетных показателей инженерно-геологических свойств, необходимых при оценке устойчивости сооружений, возводимых в неоднородных слоистых грунтах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. «Наука», 1965.
2. Н. В. Коломенский. Инженерная геология. Часть II. Госгеолтехиздат, 1956.
3. В. В. Налимов. Применение математической статистики при анализе вещества. Физматгиз, 1960.
4. Е. А. Писарев. Некоторые приложения статистических методов к обработке результатов свойств грунтов. Сб. «Вопросы методики инженерно-геологических исследований», Томск, 1966.
5. Пособие по проектированию оснований зданий и сооружений, Стройиздат, 1964.
6. Г. Л. Фисенко. Устойчивость бортов карьеров и отвалов. «Недра», 1965.