ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 202 1973

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ УОЛША

Ю. П. ЗАБАШТА, В. М. РАЗИН

В статье рассмотрены вопросы вычисления функциональных зависимостей при полиномиальной аппроксимации вычисляемой функции, где в качестве базиса аппроксимации принята система ортогональных функций Уолша. Такое решение дает возможность существенно повысить скорость вычисления функциональных зависимостей, уменьшить объем оборудования преобразователя при приемлемой точности вычислений $10^{-4} \div 10^{-5}$.

В системах, работающих в реальном масштабе времени, к которым относятся и системы распознавания, актуален вопрос о скорости вычисления различного рода функциональных зависимостей. При этом в первую очередь видна целесообразность всемерного повышения скорости вычисления основных элементарных функций, таких как Sin$x$, Cos$x$, tq$x$, arcsin$x$, ln$x$, ex а также других функциональных зависимостей, сопровождающих процесс распознавания.

Как известно из теории рядов, функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена рядом.

$$f(t) = \sum_{\kappa=0} a_\kappa \varphi_\kappa(t), \tag{1}$$

где $\{\varphi_\kappa(t)\}$ — любая полная ортогональная система функций.

Помимо требований ортогональности и полноты, к системе $\{\varphi_\kappa(t)\}$ могут быть предъявлены требования наиболее быстрой сходимости, а в ряде случаев решающим при выборе системы $\{\varphi_\kappa(t)\}$ является их простота физического осуществления.

Наиболее часто в качестве системы $\{\varphi_\kappa(t)\}$ выступают общеизвестные системы, как, например, полиномы Эрмита, Лежандра, Чебышева, Якоби, Бесселя, тригонометрическая система функций и др.

В вычислительной технике принят в основном метод приближения алгебраическими полиномами вида

$$f(t) = \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa t^\kappa.$$

В теории сигналов и цепей наиболее употребительна тригонометрическая система

$$f(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [a_\kappa \sin \kappa\omega t + b_\kappa \cos \kappa\omega t].$$

Рассмотрим достоинства и недостатки указанных систем с точки зрения быстродействия метода приближения и удобства технической реализации. При приближении степенными полиномами можно добиться наиболее быстрой сходимости (полиномы Чебышева). В этом их преимущество и удобство для математического анализа. При этом, однако, следует иметь в виду следующее:

1. Приближение алгебраическими полиномами производится на отдельных отрезках определения функции, т. е. для различных отрезков исследуемой функции различен и аппроксимирующий полином. Отсюда разнообразие алгоритмов вычисления и трудности технической реализации.

2. Вычисление значения функции требует, как это видно из формулы

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + \cdots + a_n t^n,$$

n сложений и n умножений.

Поскольку операция умножения занимает в несколько раз больше времени, чем сложение, с точки зрения быстродействия такое представление также не оптимально. Те же недостатки присущи системе тригонометрических функций кратных аргументов. Идеальной с рассматриваемой точки зрения была бы система, которая бы:

1) исключила операцию умножения при вычислении значения исследуемой функции в точке t_i;

2) была удобна с точки зрения технической реализации с учетом требований современной дискретной техники (интегральных схем и т. п.);

3) позволяла вычислять значения аппроксимирующего полинома в той же точке с минимальными трудностями;

4) допускала единый алгоритм вычислений для широкого класса исследуемых функциональных зависимостей.

Наиболее полно этим требованиям отвечает система ортогональных функций Уолша [1]. Поскольку функции Уолша принимают только два значения $+1$ и -1, то:

1) отсутствует операция умножения при вычислении ряда

$$f(t) = a_0 + a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \cdots; \quad \varphi_i(t) = \pm 1,$$

а значение $f(t)$ определяется суммированием постоянных коэффициентов, взятых с соответствующим знаком;

2) значение функции $\varphi_n(t)$ легко определяется по двоичному разложению числа t;

3) то обстоятельство, что функции Уолша принимают только два дискретных значения ± 1, выгодно отличает их от других ортогональных систем и удобно для физической реализации на элементах дискретной техники, поскольку последние также имеют только два дискретных состояния («0» и «1»).

Для вычисления значений функций Уолша в любой точке введено следующее обозначение [1]. Определим функцию от аргументов α и t

$$\{\alpha; t\} = \begin{cases} 0, & \text{если количество разрядов, где имеют единицы, четно } \alpha \text{ и } t; \\ 1 & \text{в в противном случае.} \end{cases}$$

Функция $\{\alpha, t\}$ определена для всех конечных двоичных дробей α и вещественных t.

Имеет место тождество

$$w_\alpha(t) = (-1)^{\{\alpha, t\}} \qquad (2)$$

или

$$w_\alpha(t) = (-1)^{\sum\limits_{j=0} \alpha_j t_j}, \qquad (3)$$

где α_j; t_j; j — разряд двоичного разложения соответственно α и t. Последнее тождество является хорошим методом вычисления значения $w_\alpha(t)$.

Определим число $к$ членов ряда (1), которое необходимо иметь в разложении Фурье-Уолша, чтобы обеспечить представление некоторой функции $f(t)$ с заданной точностью ξ.

В качестве входного алфавита приняты пять элементарных функций: $\sin \pi t$, $\cos \pi t$, $tg \frac{\pi}{4} t$, e^t и $ln(1+t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Расчет велся на ЭВМ по алгоритму, позволяющему построить ряд Уолша с минимальным числом членов, обеспечивающих заданную погрешность ξ.

Обозначим $\Delta_l(к)$ таблицу погрешностей, получаемую при приближении функции $f(t)$, рядом, состоящим из $l+1$ члена, причем члены этого ряда соответствуют наибольшим по абсолютной величине коэффициентам

$$\Delta l(к) = f(t) - \sum_{\{x\}} a(x)\, w(x, t).$$

Если коэффициенты Уолша расположены в порядке убывания, то по таблице $\Delta l(к)$ можно построить таблицу $\Delta l(к)$ следующим образом:

$$\Delta l(к) = \Delta l - 1\,(к) - a_s w\,(s, t),$$

где a_s — $(l+1)$ — коэффициент по порядку убывания. Если теперь при каждом вычислении таблицы $\Delta l(к)$ для $l = 0; 1; 2; \ldots m$ производить сравнение всех табличных значений с ξ, то первая таблица $\Delta l(к)$, в которой ни одно значение не будет превышать ξ, будет гарантировать наименьшее число членов ряда Уолша. Результаты расчетов для исследуемых функций сведены в табл. 1. Здесь же для сравнения приведено необходимое число членов степенного ряда для аппроксимации с той же точностью.

Таблица 1

$f(t)$	Точность вычисления / Число членов разложения ряда	$\varepsilon \leqslant 10^{-1}$	$\varepsilon < 10^{-2}$	$\varepsilon < 10^{-3}$	$\varepsilon < 10^{-4}$	$\varepsilon < 10^{-5}$	$\varepsilon < 10^{-6}$	$\varepsilon < 10^{-7}$	$\varepsilon < 10^{-8}$
$\sin \pi t$	Уолша	2	3	10	22	37	50	55	63
	степенного	3	3	5	6	7	8	9	10
$\cos \pi t$	Уолша	2	3	10	22	37	50	56	63
	степенного	2	3	5	6	7	8	9	10
$tg \frac{\pi}{4} t$	Уолша		3	8	25	10	101	117	
	степенного		3	5	6	7	8	9	
e^t	Уолша		3	11	22	44	86	104	117
	степенного		3	4	5	6	7	9	10
$\ln(1+t)$	Уолша		3	7	32	60	84	115	122
	степенного		3	5	6	7	8	9	10

Согласно табл. 1, поскольку ряд Уолша слабосходящийся, наиболее целесообразно использовать полиномы Уолша при точности аппроксимации $10^{-4} \div 10^{-5}$. Такая точность вполне приемлема при всех инженерных расчетах.

При этом число членов ряда Уолша (постоянных коэффициентов) составит 25—30 констант. При увеличении точности вычисления до $10^{-7} \div 10^{-8}$ число хранимых констант увеличивается до $100 \div 120$, однако объем оборудования при этом увеличивается незначительно.

Задача преобразователя состоит в определении значения заданной из набора $м$ функции $f(t)$ в некоторой точке ее аргумента t_i.

В качестве алгоритма, осуществляющего вычисления, принят алгоритм, приближающий данную функцию на всем интервале изменения ее аргумента $t \in [0,1]$ с помощью полиномов Уолша (полиномальная аппроксимация)

$$f(t) = \sum_{0}^{n} a_к w_к(t).$$

Как следует из основного свойства функции Уолша, вычисление значения функции в точке t_i сводится к определению знака функций Уолша в точке t_i и суммированию постоянных коэффициентов $a_к$ со знаком соответствующей функции Уолша $w_к(t_i)$. Вычисление знака функции Уолша $w_к(t_i)$ производится согласно

$$w_к(t) = (-1)^{\sum\limits_{j=0}^{p} t_{ij} к_j},$$

где суммирование в показателе производится по модулю 2, а t и $к_j$ представлены в их двоичном разложении.

Блок-схема устройства представлена на рис. 1.

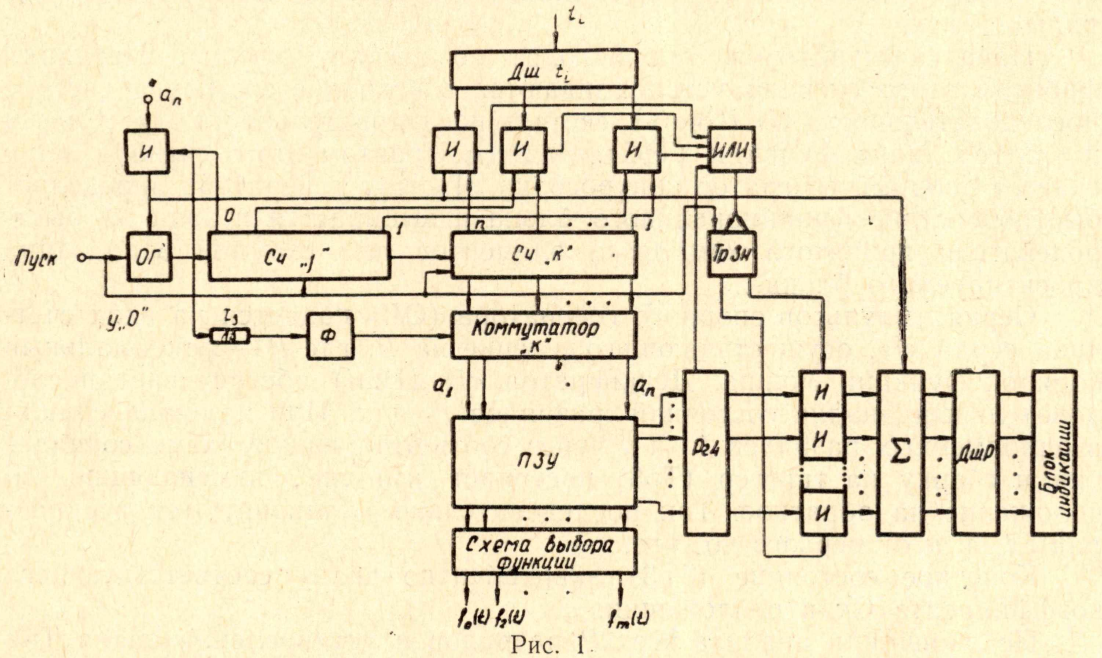

Рис. 1

1. Дешифратор (Dш t_i) представляет значение в двоичном разложении.

2. Опорный генератор (ОГ) служит в качестве задающего генератора синхросерии.

3. Счетчик (Сч«j») и дешифратор (Dш«j») служат для создания последовательности $j = 0,12$ р.

4. Счетчик (Сч «$к$») предназначен для выработки последовательности «К» от 1 до n задания номера функции Уолша в двоичном разложении.

5. Коммутатор («К») распределяет сигнал считывания формирователя Ф последовательно по каждому из n каналов считывания.

6. Постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) служит для хранения постоянных коэффициентов Ск.

7. Регистр числа prч.

8. Сумматор накапливающего типа Σ.

9. Дешифратор результата (Dшp) служит для преобразования двоично-десятичного кода сумматора в десятичный код.

10. Схема вычисления знака функции Уолша.

11. Схема выбора функции.

Работа преобразователя происходит следующим образом. На входе дешифратора (Dшt_i) в цифровой форме с решающего устройства автомата в виде двоично-десятичного кода задается значение аргумента функции t_i, на выходе дешифратора (Dшt_i) это значение будет представлено уже в виде двоичного кода. Вид вычисляемой функции определяется положением ключей схемы выбора функции, которое задает необходимый набор постоянных коэффициентов в ПЗУ.

Знак, с которым необходимо эти коэффициенты суммировать, т. е. знак функции Уолша, определяется схемой вычисления знака функции Уолша. Работа ее заключается в следующем. Для функции Уолша по двоичному разложению $к$ и t_i необходимо вычислить число совпадающих единиц в одноименных разрядах разложения t_i и $к$. При четном числе единиц совпадения знак функции Уолша положителен, при нечетном — отрицателен. Процедура вычисления намного упрощается, если в качестве суммирующего устройства использовать триггер со счетным входом, осуществляющим суммирование по модулю 2, а на вход его подавать поочередно через схемы совпадения одноименные разряды t_i и $к$.

Начало вычисления происходит по сигналу «пуск». Передним фронтом этого сигнала устанавливаются в исходное состояние счетчик последовательности «j» (Сч«j»), счетчик последовательности «$к$» (Сч«$к$») и триггер знака функции (Тр3). Задним фронтом этого сигнала запускается опорный генератор синхросерии. Частота генератора определяет быстродействие функционального блока и выбирается исходя из быстродействия принятого комплекса элементов для схемной реализации проектируемого блока.

Серия импульсов опорного генератора (ОГ) подается на вход счетчика серии «f», осуществляющего деление на P, где P — максимальный порядок функции Уолша. Дешифратор «j» (Dшj) обеспечивает последовательный анализ состояний разрядов t_i и $к$. При наличии единиц в одноименных разрядах t_i и $к$ через соответствующую схему совпадения и сборку на триггер (Тр3) поступает импульс, изменяющий его положение на обратное. Так последовательно анализируются все разряды t_i и $к$ от первого до p-го.

Конечное состояние (Тр3) эквивалентно знаку соответствующего коэффициента С$к$ в разложении.

По окончании анализа всех P разрядов и установлении знака Тр3 на коммутатор «К» с формирователя (Ф) выдается сигнал считывания. Коммутатором выбирается шина коэффициента $Ск$ и с приходом сигнала считывания значение С$к$ заносится в регистр числа Рr4. С регистра числа Pr4 значение $Ск$ может быть послано в сумматор Σ в прямом или обратном коде, в зависимости от знака функции Уолша $W_к(t)$. Группа вентилей, управляемых триггером (Тр3), обеспечивает выполнение указанной операции. На этом заканчивается цикл выборки коэффициента С$к$. Далее счетчик $к$ автоматически устанавливается в положение К + 1, триггер (Тр3) в исходное положение, и цикл повторяется.

Таким образом, в сумматоре заносятся все коэффициенты разложения $Ск$. По окончании вычисления последнего коэффициента на опорный генератор выдается сигнал «стоп», счетчики и Тр3 устанавливаются в нуль, результат вычисления из сумматора через дешифратор результата Дш p выдается на блок индикации.

Схема выбора функции определяет в ПЗУ только коэффициенты $Ск$, относящиеся к вычисляемой функции.

Проведем сравнение рассмотренного варианта функционального преобразователя с аналогичным по функциональным возможностям блоком вычисления функций специализированной вычислительной машины «Орбита» (находится в стадии внедрения на курском заводе «Счетмаш»).

Алгоритм вычисления функции ВМ «Орбита» — полиноминальная аппроксимация степенным рядом. Способ вычисления — программное управление арифметическим устройством машины в зависимости от вида аппроксимируемой функции.

Быстродействие (время вычисления одной функции) «Орбиты» составляет $1{,}5 \div 1{,}7$ *сек*, для преобразователя Уолша — $0{,}7 \div 1$ *mсек*.

Объем оборудования соответственно составляет 290 и 200 интегральных элементов серии ТС. Точность вычисления $10^{-8} \div 10^{-9}$ и $10^{-4} \div 10^{5}$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Поляк, Ю. А. Шрейдер. Применение полиномов Уолша в приближенных вычислениях. — Вопросы теории математических машин, вып. 2, 1962.