ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 203 1974

НЕУСТРАНИМЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ЛОКАЛЬНО СГЛАЖЕННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

В работе [1] показано, что значение неустранимой погрешности второго рода при аппроксимации в среднем тригонометрическим полиномом возрастает с увеличением степени полинома, т. е. сходимость приближения в целом нарушается. В настоящей заметке рассматривается один из методов уменьшения влияния неопределенности в значениях узлов на точность и устойчивость приближения, существо которого состоит в локальном сглаживании аппроксимирующего тригонометрического ряда, построенного по экспериментальным данным.

Операция локального сглаживания заключается в замене исходного ряда новым рядом согласно соотношению [2]

$$\overline{T}_n(x)\frac{1}{h}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_n(x-\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где h — интервал усреднения. Иными словами, исходный ряд $T_n(x)$ заменяется новым $\overline{T}_n(x)$, полученным из первого путем усреднения на интервале длиной h с центром в точке x.

Если значение h выбрано из условия

$$h=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{2n+1}, \tag{2}$$

то метод локального сглаживания в применении к тригонометрическим полиномам называется методом σ-множителей [2]. Применяя преобразование (1) к тригонометрическому полиному $T_n(x)$ в его канонической форме, получим

$$\overline{T}_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{hk}{2}}{\frac{hk}{2}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{3}$$

при h, удовлетворяющем (2).

Сохраняя прежней формулировку задачи [1], для неустранимой погрешности второго рода получим выражение

$$\bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2\frac{kh}{2}}{\left(\frac{kh}{2}\right)^2}\left(M[\alpha_k^2]+M[\beta_k^2]\right) \tag{4}$$

или в окончательном виде

$$\bar{\sigma}_2^2 = \frac{d^2}{\pi^2}(n-1)\sum_{k=1}^{2n} y_k^2. \tag{5}$$

При выводе соотношения (5) использовалось равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{hk}{2} = \frac{1}{2}(n-1), \tag{6}$$

доказательство которого основано на известной формуле

$$\sum_{m=1}^{n} e^{ihm} = \frac{1-e^{ihn}}{1-e^{-ih}}. \tag{7}$$

Считая последовательность отсчетов y_k ($k=0, 1..., 2n$), ограниченной константой M, получим неравенство

$$\bar{\sigma}_2^2 \leqslant \frac{d^2}{\pi^2}(n-1)(2n+1)M^2. \tag{8}$$

При достаточно больших n неравенство (8) можно упростить

$$\bar{\sigma}_2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi} dMn. \tag{9}$$

Интересно сопоставить значения неустранимых погрешностей для несглаженного и сглаженного рядов. Отношение погрешностей дает

$$\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+1)(2n+1)}} \tag{10}$$

или при больших n

$$\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} = 1{,}28... \tag{11}$$

Из последнего соотношения видно, что во втором случае неустранимая погрешность $\bar{\sigma}_2$ при больших n несколько меньше неустранимой погрешности для несглаженного ряда. Для небольших n, что наиболее часто встречается в практике приближения, уменьшение погрешности более существенно. В частности, при $n=2$; 3; 4 соответствующие значения $\sigma_2/\bar{\sigma}_2$ равны 1,98; 1,68; 1,56. Незначительность выигрыша в уменьшении погрешности для сглаженного ряда при больших n вызвано тем, что при возрастании n интервал сглаживания $h \longrightarrow 0$ и эффект сглаживания сказывается все меньше и меньше. В целом нужно отметить, что сглаживание приближающего ряда с помощью σ-множителей не решает проблемы устойчивости процесса приближения при вариации последовательности узлов в ограниченных пределах.

При большом числе отсчетов, когда h достаточно мало, интервал сглаживания можно взять большим, нежели h. Пусть, например, интервал локального усреднения $\delta = mh$, где m — целое и h определяется согласно (2). Тогда преобразование (1) примет вид

$$\overline{\mathrm{T}}_n(x) = \frac{1}{mh} \int_{-\frac{h}{2}m}^{\frac{h}{2}m} \mathrm{T}_n(x-\xi)\, d\xi \tag{12}$$

и отношение

$$\frac{\sigma_2}{\overline{\sigma}_2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot m, \tag{13}$$

т. е. в m раз оказывается больше первоначального значения. Таким образом, увеличение интервала локального усреднения делает процесс приближения более устойчивым. Однако при этом необходимо, чтобы m оставалось значительно меньшим $N = 2n + 1$, в противном случае искажение аппроксимирующего ряда, вызванное локальным усреднением, будет значительным. Оценку этого искажения можно найти в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. Наац. Приближение в среднем тригонометрическими полиномами по приближенным узлам (настоящий сборник).

2. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз. М., 1961.