

## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС С. Н. БЕРНШТЕЙНА ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ДАННЫМ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

В настоящей работе рассматривается интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна для случая, когда исходные данные являются приближенными, т. е. отсчеты и узлы, в которых они производятся, известны с определенной погрешностью. Наличие указанных погрешностей существенно влияет на качество приближения, как это уже было показано в работе [1].

Интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна строится на основе тригонометрических интерполяционных полиномов согласно выражению (имеется в виду первый процесс С. Н. Бернштейна [2]).

$$U_q^{(n)}(x) = \frac{T_{n,0}(x) + T_{n,1}(x) + \dots + T_{n,q}(x)}{q+1}, \quad (1)$$

где

$$T_{n,p}(x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{m=1}^p (a_m^{(n)} \cos mx + b_m^{(n)} \sin mx), \quad (2)$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} a_0^{(n)} &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \\ a_m^{(n)} &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos mx_k, \\ b_m^{(n)} &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \sin mx_k, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

для системы равноотстоящих узлов

$$x_k = \frac{2\pi k}{2n+1}. \quad (4)$$

Интерполяционный тригонометрический полином (2) по системе (4) можно записывать также в виде

$$T_{n,p}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \frac{\sin \frac{2p+1}{2}(x-x_k)}{\sin \frac{x-x_k}{2}}. \quad (5)$$

Полиномы (1) с учетом (2) и (3) принимают следующее выражение:

$$U_q^{(n)}(x) = \frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \left[ \frac{\sin \frac{q+1}{2}(x-x_k)}{\sin \frac{x-x_k}{2}} \right]^2. \quad (6)$$

Рассмотрим неустранимые погрешности первого и второго рода для интерполяционного процесса (6).

Неустранимая погрешность первого рода обусловлена наличием неопределенности в последовательности отсчетов  $y_k$  ( $k=0, 1, \dots, 2n$ ). Рассматривая случайное множество последовательностей отсчетов (множество реализаций), можно записать его свойства

$$\left. \begin{aligned} M\{y'_0, y'_1, \dots, y'_{2n}\} &= M\{y'_0\}, M\{y'_1\} \dots M\{y'_{2n}\} = y_0, y_1, \dots, y_{2n} \\ D\{y'_0, y'_1, \dots, y'_{2n}\} &= D\{y'_0\}, D\{y'_1\} \dots D\{y'_{2n}\} = \sigma_0^2, \sigma_1^2 \dots \sigma_{2n}^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_{2n}. \quad (8)$$

Для случайного множества последовательностей отсчетов можно построить случайное множество полиномов

$$\{U_q^{(n)}(x)\}' ,$$

для которого

$$M\{U_q^{(n)}(x)\}' = U_q^{(n)}(x). \quad (9)$$

Неустранимую погрешность для этого случая будем определять выражением

$$\sigma_1^2 = D\{U_q^{(n)}(x)\}' . \quad (10)$$

Используя общую форму интерполяционных полиномов

$$U_q^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cdot k_{n,q}(x-x_k), \quad (11)$$

при условии (7) и (8), можно показать, что

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2 \sum_{k=0}^{2n} k_{n,q}^2(x-x_k). \quad (12)$$

Аналогично можно сформулировать задачу и для неустранимой погрешности второго рода [1]. При этом уже случайное множество поли-

номов  $\{U_q^{(n)}(x)\}''$  строится на случайном множестве последовательностей узлов интерполирования, в среднем совпадающих с последовательностью равноотстоящих узлов (4). Тогда значение неустранимой погрешности второго рода определится выражением

$$\sigma_2^2 = D\{U_q^{(n)}(x)\}'' = d^2 \sum_{k=0}^{2n} y_k^2 [k'_{n,q}(x-x_k)]^2. \quad (13)$$

Считая последовательность отсчетов ограниченной в совокупности некоторой постоянной  $M$ , получим неравенство

$$\sigma_2^2 \leq d^2 M^2 \sum_{k=0}^{2n} |k'_{n,q}(x-x_k)|^2. \quad (14)$$

Для того, чтобы получить конкретные значения оценок согласно (12) и (14), необходимо вычислить значения соответствующих сумм для ядра  $k_{n,q}(x-x_k)$ .

Опуская весьма трудоские и громоздкие вычисления, запишем окончательный результат

$$\sum_{k=0}^{2n} k_{n,q}^2(x-x_k) = \frac{1}{(2n+1)^2(q+1)^2} \sum_{k=0}^{2n} \left[ \frac{\sin \frac{q+1}{2}(x-x_k)}{\sin \frac{x-x_k}{2}} \right]^4 = \frac{4}{3} \frac{q\left(q-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)(q+1)} \quad (15)$$

и соответственно

$$\sum_{k=0}^{2n} [k'_{n,q}(x-x_k)]^2 = \frac{q(q^2+3q+2)(2q^3-2q+3)}{18(q+1)(2n+1)}. \quad (16)$$

В результате для неустранимых погрешностей получим следующие выражения:

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2 \frac{4q\left(q-\frac{1}{2}\right)}{3(2n+1)(q+1)} \quad (17)$$

и

$$\sigma_2^2 \leq \frac{d^2 M^2}{18} \cdot \frac{q(q^2+3q+2)(2q^3-2q+3)}{(2n+1)(q+1)}. \quad (18)$$

Проведем обсуждение полученных результатов.

При достаточно больших  $n$  и  $q$  для неустранимой погрешности  $\sigma_1$  можно дать более простое выражение, а именно:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sqrt{\frac{2q}{3n}}. \quad (19)$$

Откуда видно, что при возрастании  $q$  и  $n$  ( $q < n$ ) значение  $\sigma_1$  остается в определенных пределах, определяемых значением погрешности измерения  $\sigma_0$ .

Следовательно, первый процесс С. Н. Бернштейна для приближенных отсчетов остается устойчивым при возрастании порядка интерполяционного полинома. Аналогичные результаты справедливы и для тригонометрического интерполяционного полинома [3]. При этом необходимо заметить следующее. Поскольку общая структура погрешности приближения определяется выражением

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad (20)$$

где  $\sigma_n$  — среднеквадратичная погрешность приближения по точным данным, определяемая лишь сходимостью интерполяционного процесса, то открывается возможность оценки требуемого объема  $N$  исходных данных при заданных значениях  $\sigma$ ,  $\sigma_0$  и  $d$ . При этом обычно полагают, что все три составляющие  $\sigma_n$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должны быть одного и того же порядка.

Для неустранимой погрешности второго рода  $\sigma_2$  при больших  $n$  и  $q$  ( $q < n$ ) также можно дать более простое неравенство

$$\sigma_2 \leq dM \frac{q^2 \sqrt{q}}{3\sqrt{2n+1}}. \quad (21)$$

Откуда видно, что неустранимая погрешность второго рода в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна весьма резко возрастает с увеличением числа  $q$ . Это значит, что процесс С. Н. Бернштейна является неустойчивым относительно смещений узлов на отрезке интерполирования. Объясняется этот факт следующим образом. При возрастании  $q$  в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна наблюдается усиление локализации ядра  $k_{n,q}(x-x_k)$  в области центрального максимума, находящегося в точке  $x_k$ . Хотя это благоприятно сказывается на сходимости полинома к приближаемой функции, влияние случайной вариации последовательности узлов относительно системы равноотстоящих узлов  $\{x_k\}$  на значение полинома в любой точке отрезка приближения становится значительным. Аналитически это сказывается в увеличении значений производной от ядра в  $\delta$ -окрестности точки  $x_k$  при возрастании  $q$ .

Таким образом, интерполяционный процесс, построенный методом суммирования по системе тригонометрических интерполяционных полиномов, становится более чувствительным к неопределенности в фиксации узлов интерполирования. Поэтому применение таких сложных аппаратов приближения, каким является интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, оправдано только в случае весьма точных измерений исходных данных.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. На а ц. Приближение в среднем тригонометрическими полиномами по приближенным узлам. (Настоящий сборник).
2. И. П. Н а т о н с о н. Конструктивная теория функций. М., 1949.
3. И. Э. На а ц. Применение тригонометрической интерполяции в задачах дискретного измерения. Изв. ТПИ, т. 168., изд. ТГУ, Томск. 1968.