ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 203 1974

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОЙ ХОРДЫ В ЭЛЛИПСОИДЕ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

В настоящей работе рассмотрим применение методов определения моментов случайной хорды в выпуклом теле, описанных в работе [1] настоящего сборника, на примере эллипсоида.

Пусть положение эллипсоида в пространстве определяется в системе S, S'—система координат, связанная с главными осями эллипсоида. Вращение эллипсоида вокруг точки O (рис. 1) можно задать вращением

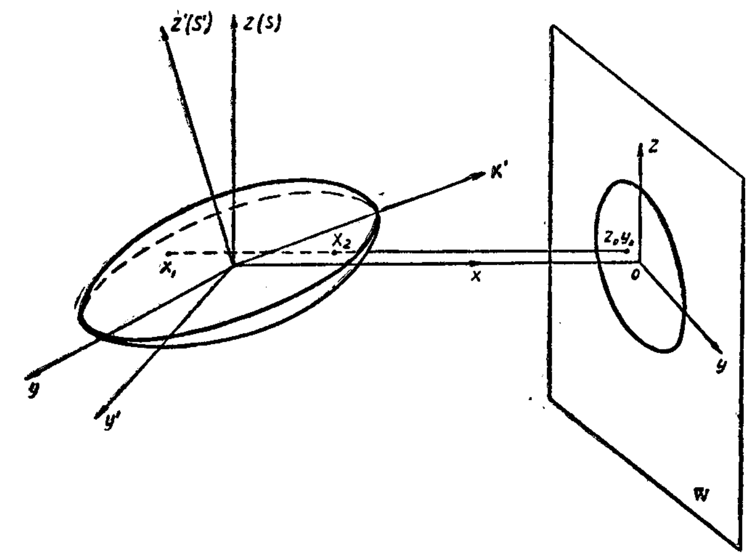

Рис. 1

системы S' вокруг точки O. Соответствующее преобразование координат запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1 x + m_1 y + n_1 z \\ y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z \\ z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Тогда уравнение поверхности эллипсоида в системе S примет вид

$$\frac{(l_1 x + m_1 y + n_1 z)^2}{a^2} + \frac{(l_2 x + m_2 y + n_2 z)^2}{b^2} + \frac{(l_3 x + m_3 y + n_3 z)^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Будем проектировать эллипсоид на некоторую плоскость W в направлении оси x системы S. Длина хорды эллипсоида в направлении оси x определяется как разность корней x_1 и x_2 уравнения (2), решенного относительно x, т. е.

$$l_x = x_1 - x_2. \tag{3}$$

Соответственно имеем уравнение границы проекции эллипсоида P_x на плоскость W в направлении x:

$$l_x = 0. \tag{4}$$

Среднее значение хорды эллипсоида в направлении оси x для какого-то фиксированного положения системы S' (тоже эллипсоида) определится интегралом

$$\bar{l}_x = \frac{1}{P_x} \int\limits_{P_x} l_x dP. \tag{5}$$

Соответственно второй момент

$$\overline{l_x^2} = \frac{1}{P_x} \int\limits_{P_x} l_x^2 dP. \tag{6}$$

Опуская вычисления, приведем окончательный результат:

$$\bar{l}_x = \frac{4}{3} \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2l_1^2 + a^2c^2l_2^2 + a^2b^2l_3^2}}, \tag{7}$$

$$P_x = \pi\sqrt{b^2c^2l_1^2 + a^2c^2l_2^2 + a^2b^2l_3^2}, \tag{8}$$

$$\overline{l_x^2} = \frac{2\, a^2\, b^2\, c^2}{b^2c^2l_1^2 + a^2c^2l_2^2 + a^2b^2l_3^2}. \tag{9}$$

Из соотношений (7) и (8), в частности, видно, что величина

$\bar{l}_x \cdot P_x = \text{const} = \frac{4}{3}\pi\, abc$, т. е. объему эллипсоида.

Введем обозначение

$$L(l_1, l_2, l_3) = b^2c^2l_1^2 + a^2c^2l_2^2 + a^2b^2l_3^2 \tag{10}$$

и перейдем от направляющих косинусов l_1, l_2, l_3 к системе углов Эйлера ϑ, ψ, φ. В результате получим

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \psi, \varphi) = {} & 2c^2(a^2 - b^2)\cos\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi \cdot \sin\psi \cdot \sin\varphi + \\ & + c^2\cos^2\vartheta \sin^2\psi(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) + \\ & + c^2\cos^2\psi(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + a^2b^2\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\psi. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом (11) имеем:

$$\bar{l}_x = \frac{4}{3} \frac{abc}{\sqrt{L(\vartheta, \psi, \varphi)}}, \tag{12}$$

$$P_x=\pi\sqrt{L(\vartheta,\psi,\varphi)}, \tag{13}$$

$$\overline{l_x^2}=\frac{2a^2b^2c^2}{L(\vartheta,\psi,\varphi)}. \tag{14}$$

Для определения средних значений указанных величин по всем возможным ориентациям эллипсоида относительно плоскости W необходимо вычислить интегралы по ϑ, ψ, φ от соответствующих выражений. Имеем

$$\overline{l}=\frac{32}{3\pi^3}abc\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{L(\vartheta,\psi,\varphi)}}, \tag{15}$$

$$\overline{l^2}=\frac{16}{\pi^3}a^2b^2c^2\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{L(\vartheta,\psi,\varphi)}, \tag{16}$$

$$\overline{P}=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\pi/2}\sqrt{L(\vartheta,\psi,\varphi)}\,d\varphi, \tag{17}$$

$$\overline{P^2}=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\pi/2}L(\vartheta,\psi,\varphi)d\varphi. \tag{18}$$

Из общих выражений (12—14), а также (15—16) можно рассмотреть некоторые частные случаи.

1. Пусть $a=b=c=R$, т. е. эллипсоид превращается в шар, тогда

$$L(\vartheta,\psi,\varphi)=R^4$$

и соответственно

$$\overline{l}=\frac{4}{3}R, \tag{19}$$

$$\overline{l^2}=2R^2. \tag{20}$$

2. Определим среднее значение хорды эллипсоида, обусловленное вращением последнего вокруг оси y. В этом случае

$$-\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\qquad \varphi=\psi=\pi/2 \text{ и}$$

$$L(\vartheta)=b^2(c^2\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta). \tag{21}$$

Соответственно имеем

$$\overline{l}=\frac{8}{3\pi}ac\int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{c^2\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta}}=\frac{8a}{3\pi}\cdot F(k), \tag{22}$$

где $F(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода,

$$k^2=(a^2-c^2)/a^2\quad (a>c).$$

Для остальных величин имеем

$$\overline{l^2}=2ac, \tag{23}$$

$$\overline{P}=2ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta=2ab\,E(k), \tag{24}$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, и

$$\overline{P}^2=\frac{\pi^2 b^2}{2}(a^2+c^2). \tag{25}$$

3. При вращении эллипсоида вокруг оси z имеем $\vartheta=0$, $\psi=0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ и

$$L(\varphi)=c^2(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi). \tag{26}$$

Значения остальных величин аналогичны результатам (22—25).

4. При вращении эллипсоида вокруг оси x имеем

$$\varphi=\psi=0, \qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi \quad \text{и}$$

$$L(\vartheta,\psi,\vartheta)=c^2 b^2,$$

$$\overline{l}=\frac{4}{3}a, \tag{27}$$

$$\overline{l^2}=2a^2. \tag{28}$$

Этот же результат справедлив при вращении эллипсоида вокруг любой оси, если направление проектирования совпадает с направлением этой оси. Таким образом, средние значения случайных хорд эллипсоида $\overline{l}_x$, $\overline{l}_y$, $\overline{l}_z$ по трем взаимно перпендикулярным направлениям, совпадающим с его главными осями, равны

$$\frac{4}{3}a,\ \frac{4}{3}b \text{ и } \frac{4}{3}c \text{ соответственно.}$$

Выражения (12), (13) и (14) могут быть положены в основу численного расчета значений, соответствующих величине при данных a, b и c.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. Наац. К определению статистических свойств случайной хорды в выпуклом теле. (Настоящий сборник).