

## СТРОГАЯ ТЕОРИЯ КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА РАДИОЧАСТОТЫ И НЕКОТОРЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ ПРИЕМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ОДНОСЛОЙНОЙ КАТУШКИ

Р. М. КЕССЕНИХ

(Представлена научным семинаром кафедры электроизоляционной  
и кабельной техники)

Конструирование радиоаппаратуры во многих случаях требует применения двухполюсных и многополюсных цепей с малыми потерями энергии и со стабильными по отношению к внешним воздействиям резонансными и антирезонансными частотами.

В соответствии с общей теорией цепей, импеданс двухполюсника определяется выражением  $I$  через  $P$ -среднюю мощность, за период поглощенную цепью, и средние за период значения энергии  $W_\mu$  магнитного и  $W_\epsilon$  электрического полей, созданных токами и зарядами в элементах цепи.

$$z = \frac{P}{I^2} + \frac{i2\omega(W_\mu - W_\epsilon)}{I^2} = R(\omega) + ix(\omega). \quad (1)$$

Как известно, резонансными и антирезонансными для двухполюсника называются частоты, при которых  $|z|$  имеет экстремум и  $x(\omega) = 0$ . При этом соответствующая частота  $\omega_k$  будет резонансной, если  $|z(\omega_k)|$  имеет в точке  $\omega = \omega_k$  минимум и антирезонансность, если этой точке соответствует максимум модуля полного сопротивления.

Из сказанного следует, что при малых потерях  $\left(\frac{P}{\bar{W}_\mu + \bar{W}_\epsilon} \ll 1\right)$  резонансные свойства определяются частотной зависимостью величины

$$\frac{1}{\omega} x(\omega) = \frac{2\bar{W}_\mu - \bar{W}_\epsilon}{I^2}. \quad (2)$$

Конструктивные методы осуществления цепей со свойствами двухполюсника в настоящее время весьма разнообразны, однако большинство типов двухполюсников, характеризующихся острыми резонансными и антирезонансными кривыми, может быть отнесено к одной из трех групп:

- а) колебательный контур с разделенными индуктивностью и емкостью;
- б) объемный резонатор;
- в) длинная линия или волноводный резонатор.

Системы типа «С» могут быть осуществлены в виде сочетания двухполюсников типа «а» (искусственные линии). Возможность сосре-

доточения относительно больших запасов энергии магнитного поля в малом объеме при малом количестве металла представляет особую ценность для конструирования малогабаритной аппаратуры. Если оставить в стороне выходящий за рамки нашего рассмотрения тип систем с железными, ферродиеlectricкими и ферритовыми сердечниками, то для области частот от 1—3 до 50—100 *мгц* такая возможность создается применением однослойных соленоидальных проводников в виде катушки индуктивности с экраном или без экрана.

Для этой области частот резонансные двухполюсники в виде объемных резонаторов и длинных линий применимы лишь в редких случаях, когда размеры и вес устройства играют второстепенную роль. Для малогабаритной переносной аппаратуры связи, предназначенной к работе в диапазоне коротких и ультракоротких волн, давно применяются и сохраняют основное значение резонансные системы с разделенной индуктивностью и емкостью.

Индуктивность в таких системах осуществляется при помощи однослойных катушек самоиндукции. Многослойные катушки обладают значительными потерями и находят применение в диапазоне средних и длинных волн.

В соответствии с основной задачей настоящей работы здесь рассматриваются системы, наиболее приближающиеся по своим свойствам к чистой индуктивности, т. е. системы, для которых в рабочей области частот

$$\frac{\bar{W}_э}{\bar{W}_п} \ll 1.$$

Выбор деталей для конструирования колебательных цепей радиоаппаратуры должен производиться на основании задания определенных характеристик этих деталей, причем, разумеется, число характеристик и параметров деталей должно быть минимальным и физический смысл их должен быть возможно более ясным для конструктора.

Квазистационарная модель электрической цепи переменного тока является очень привлекательной для построения эквивалентной схемы колебательной цепи.

Простейший случай, к которому очень часто приходится сводить рассмотрение колебательных элементов радиотехнических устройств — цепь с сосредоточенной индуктивностью, емкостью и сопротивлением.

Переход от идеализированной схемы к лабораторному макету радиотехнического устройства, а затем к образцу и к стандартным деталям вносит существенные изменения в идеализированную схему. В случае простейшего колебательного контура такие изменения сводятся к учету казалось бы второстепенных поправок — таких, как распределенная емкость и распределенные потери всех видов в индуктивности, распределенная индуктивность и потери всех видов в емкости и индуктивности сопротивлений.

В некоторых случаях «паразитные явления», обуславливающие необходимость внесения таких поправок, становятся настолько резко выраженными, что теряет смысл первоначальная упрощенная эквивалентная схема (дрессель с большой емкостью при высоких частотах, бифилярное сопротивление при высоких частотах и т. д.). В таких случаях становится необходимым существенно изменять конструкцию детали для того, чтобы восстановить ее качественные особенности. В других случаях паразитные влияния второго порядка, не нарушая принципиальной стороны работы схемы, существенным образом сказываются на таких свойствах как стабильность. Целью настоящей работы, как уже указывалось, является рассмотрение вторичных

явлений в таких деталях радиоцепей высоких радиочастот (3—150 мгц), которые обусловлены влиянием диэлектрических свойств материала каркасов катушек самоиндукции на электрическое поле распределенных зарядов катушки.

Как следует из самой постановки задачи, полная и достаточно строгая трактовка вопроса о влиянии электрического поля в каркасном материале катушки самоиндукции на колебательные параметры катушки в рабочих условиях требует рассмотрения весьма сложных в геометрическом и электрическом отношении систем как сложных электродинамических проблем. Такой подход к процессам в однослойной катушке давно привлекал внимание многих физиков-теоретиков и экспериментаторов. Достаточно упомянуть, что проблема однослойной катушки в самом упрощенном виде рассматривалась теоретически и экспериментально [2, 3, 4, 5]. Попытка более строгого решения задачи о свободных и вынужденных электрических колебаниях однослойной катушки была сделана в работе [6]. Работы, в которых данная задача рассматривается в более упрощенной инженерной постановке, не учитывают полученных ранее теоретических результатов [7, 8, 9].

Естественно, что общая электродинамическая формулировка задачи во всей ее полноте не представляет для техники никакой ценности, если не установлены хотя бы предельные случаи, в которых строгая постановка подтверждает упрощенную инженерную трактовку задачи, согласующуюся с экспериментом и практикой конструирования радио-деталей.

#### Уравнения поля для сложной системы проводников и переход к уравнениям квазистационарных переменных токов

Уравнения квазистационарных переменных токов получаются из уравнений электромагнитного поля путем перехода от дифференциальных уравнений в частных производных для поля в объеме, занимаемом рассматриваемой системой к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых после интегрирования векторов электрического поля по контурам, соответствующим цепям, на которые разбивается система. В общем случае исходным является уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

Так как  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  и  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ , где  $\vec{A}$  — вектор потенциал, то на основании теоремы Стокса, примененной к уравнению  $\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$ , для любого замкнутого контура  $\Gamma_i$ ,

$$\oint_{\Gamma_i} \left\{ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} \vec{ds} = 0 \quad (2)$$

Условие перехода от этого контура интеграла к дифференциальному уравнению квазистационарной цепи переменного тока сводится к возможности представления:

$$\oint \vec{E} \vec{ds} = \sum U_{ik} + \sum R_{ik} I_k \quad (3)$$

$$\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{ds} = \frac{\partial}{\partial t} \sum L_{ik} I_k + \int \frac{\partial A_0}{\partial t} \vec{ds}, \quad (4)$$

где  $U_{ik}$  — потенциалы, наводимые на отрезках  $i$ -го контура  $k$ -м зарядом;  
 $R_{ik} I_k$  — падение напряжения на сопротивлениях  $i$ -го контура, обусловленное током

$$I_k = \frac{\partial q_k}{\partial t} \quad (5)$$

и  $I_k \frac{\partial I_k}{\partial t}$  — электродвижущая сила взаимной индукции, наводимая током  $I_k$  в  $i$ -м контуре;

$\vec{A}_0$  — вектор потенциал первичного поля, создающего электродвижущую силу в контуре.

Рассмотрим как эта схема сопоставления уравнений может быть приложена к расчету распределения зарядов и токов в катушке (намотанной на изолирующем каркасе из материала, обладающего диэлектрическими потерями), образующей колебательную цепь последовательно с конденсатором. Схематически такая система изображена на рис. 1.

Распределение изолирующего материала и проводника показано в разрезе на рис. 2 и 3. Эта схема может соответствовать применяемой конструкции катушек самоиндукции с керамическим каркасом и нанесенным вжиганием металлом обмотки катушки.

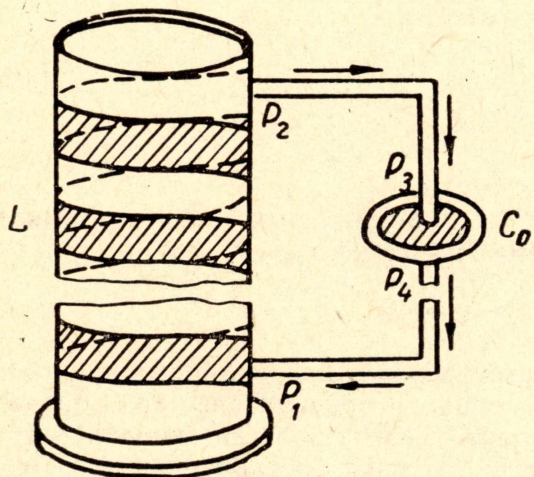


Рис. 1. Катушка индуктивности с емкостью

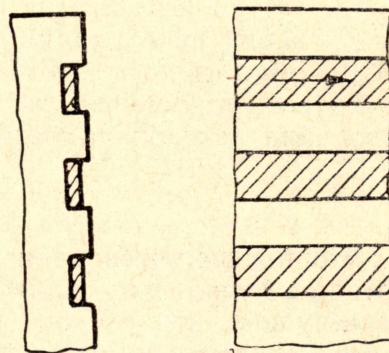


Рис. 2-3. Распределение изолирующего материала и проводника

В общем случае переход от дифференциального уравнения в частных производных к уравнениям электрических цепей соответствует выбору минимального числа контуров  $\Gamma_i$ , обход по которым с достаточной для поставленной цели точностью эквивалентен полному заданию граничных условий задачи. Нулевое приближение будет соответствовать введению одного контура обхода, представленного схематически на рис. 1.

На этом рисунке участок  $P_1 - P_2$  контура представляет собой спираль, проходящую по поверхности проводника катушки  $P_2 - P_3$  и  $P_4 - P_1$  — по поверхности соединительных проводников и  $P_3 - P_4$  через диэлектрик конденсатора  $C_0$ . При этом, в предположении, что проводимость металла  $\sigma \rightarrow \infty$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} ds + \int_{P_2}^{P_3} \vec{E} ds + \int_{P_3}^{P_4} \vec{E} ds + \int_{P_4}^{P_1} \vec{E} ds = 0 \quad (6)$$

Вследствие равенства нулю тангенциальной компоненты  $E$  на поверхности идеального проводника. Далее

$$\int_{P_3}^{P_4} \vec{E} ds = - \int_{P_3}^{P_4} \text{grad } \psi ds - \frac{\partial}{\partial t} \int_{P_3}^{P_4} \vec{A} ds. \quad (7)$$

Второе упрощающее предположение состоит в том, что потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}) d\tau}{r} \quad (8)$$

заменяется выражением без учета запаздывания (одно из условий квазистационарности) в соответствии с обычным расчетом поля и заряда в плоском конденсаторе.

При этом предположении

$$- \int_{P_3}^{P_4} \text{grad } \psi ds = \psi(P_3) - \psi(P_4) = U. \quad (9)$$

Разность потенциалов  $U$  будет равна

$$U = \frac{q}{C_0}, \quad (10)$$

где  $q$  — заряд на обкладке;

$C_0$  — емкость контурного конденсатора.

Третье упрощение сводится к допущению, что во всех точках проводника катушки и соединительных проводов

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (11)$$

Это предположение равносильно утверждению, что поверхностная плотность зарядов на проводнике катушки и соединительных проводах равна нулю и, что, следовательно, электрическое поле вне конденсатора не имеет нормальной к поверхности проводника составляющей вектора напряженности. Из этого предположения следует, что

$$\int_s j ds = J \quad (12)$$

ток через поперечное сечение проводника во всех его точках одинаков, т. е. также условие квазистационарности.

Применяя (6), (7), (10) и (12) к (2) в данном идеализированном случае, получаем

$$\oint \left\{ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} ds \cong \frac{q}{C_0} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{P_3}^{P_4} \vec{A} ds + \frac{\partial}{\partial t} \int \left\{ \int_{(P_4, P_1, P_2, P_3)} j \frac{(s_1 t - \frac{r}{c})}{r} d\tau \right\} ds + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_{P_3}^{P_4} \vec{A} ds + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{A}_0 ds. \quad (13)$$

И, наконец, после приближенной замены, также с использованием условия квазистационарности, интеграла в правой части (13) по об-

ласти проводников ( $P_4, P_1, P_2, P_3$ ), считая, что равенство (2) остается в силе, — получаем

$$-\Sigma + \frac{q}{C_0} + \frac{\partial J}{\partial t} \iint \frac{\vec{ds}' \vec{ds}}{r} = 0 \quad (14)$$

где  $\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{A}_0 \vec{ds}$  — электродвижущая сила индукции внешнего поля.

Величина  $\iint \frac{\vec{ds}' \vec{ds}}{r} = L_{\parallel}$  представляет собой самоиндукцию катушки и соединительных проводов.

Учитывая также, что в области конденсатора уравнение (11) переходит в

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \int j_{\parallel} ds = I; \quad I = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau = \frac{\partial q}{\partial t}$$

и заменяя  $\frac{\partial}{\partial t}$  на  $\frac{d}{dt}$ , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение колебательной цепи без потерь:

$$L_{\parallel} \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C_0} = \Sigma(t). \quad (15)$$

Это хорошо известный в принципе путь здесь воспроизводится в деталях с целью более отчетливого выделения допускаемых упрощений.

Не останавливаясь здесь на упрощении интеграла

$$\int \left\{ \int \vec{j} \frac{\left(s', t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau \right\} \vec{ds},$$

который при строгом рассмотрении, даже в случае идеальной проводимости содержит кроме самоиндукции также и сопротивление излучения катушки и соединительных проводов, а также зависит от эффекта близости соседних витков, следует с основной задачей работы обратить главное внимание на допущение (11)

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Это допущение утверждает, что мгновенное значение полного тока катушки остается постоянным и, следовательно, распределения емкость катушки отсутствует. Первое приближение в решении задачи, которое получается при отказе от условия (11) при сохранении предположения об идеальной проводимости проводника катушки, непосредственно приводит к необходимости учета электрического поля заряда, распределенного по поверхности проводника катушки и соединительных проводников колебательной цепи.

Все дальнейшие приближения к строгой формулировке задачи могут рассматриваться как замена обыкновенного дифференциального уравнения нулевого приближения (15) системы уравнений с первыми производными по времени от зарядов  $q_i$  или соответствующих им токов

$$I_i = \frac{dq_i}{dt}.$$

Кажется, такая система дифференциальных уравнений соответствует представлению катушки в виде электрической сети с конечным числом элементарных ячеек.

Практически это первое приближение обозначает прибавление к емкости контура ( $C_0$ ) собственной емкости катушки, которую мы обозначим через  $C'_0$ . Это приближение не достаточно для катушки с большим числом витков. Может потребоваться более сложная эквивалентная схема, в которой будет учитываться постепенное разветвление полного тока между витками катушки и распределенной емкостью витков.

**Интегральное уравнение замкнутого колебательного контура при свободных и вынужденных колебаниях и его приложение к задаче собственной емкости и добротности однослойной катушки**

Отказ от уравнения (11) восстанавливает строгое соотношение

$$\operatorname{div} \left( \vec{j} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (16)$$

где  $\vec{P}$  — вектор поляризации диэлектрика каркасного материала и изолирующей обмотки проводника катушки;

$\rho$  — объемная плотность свободных зарядов.

Скалярный потенциал поля в этом случае будет определяться выражением

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int \frac{\rho \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau - \int \frac{\operatorname{div} \vec{P} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau \right\} \quad (17)$$

или

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau. \quad (18)$$

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  определится через скалярный потенциал (17) и вектор потенциал  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau + \vec{A}_0, \quad (19)$$

где  $\vec{A}_0$  — вектор потенциал внешнего поля посредством выражения

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\frac{d\vec{j}}{dt} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\frac{r}{c}} d\tau - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t}. \quad (20)$$

Подстановка в (20) — (18) после дифференцирования по времени дает

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\vec{j} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau - \frac{\partial^2 \vec{A}_0}{\partial t^2}. \quad (21)$$

Проекция (21) на касательную  $\vec{s}$  к осевой линии, проходящей через центральную часть провода, дает при условии предположения об идеальной проводимости среды

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial s} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi \partial t^2} \vec{s}_i \int \frac{\vec{j} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau - \frac{\partial^2 A_0(t)}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Если предположить чисто гармоническую зависимость  $\vec{A}_0(t)$  от времени в виде  $\vec{A}_0(t) = \text{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega t}$  и отбрасывая в уравнении (22) решение, выражающее собственные колебания, то можно получить интегродифференциальное уравнение для плотности тока  $\vec{j}$  в проводнике катушки. Этот вопрос рассмотрен в [6].

При вынужденных колебаниях, соответствующих заданному внешнему полю с комплексной амплитудой вектор-потенциала  $\vec{A}_0$ , определение собственной емкости сводится к следующему — катушка представляется в виде эквивалентной схемы (рис. 4).

Полный ток  $I$ , входящий в двухполюсник-катушку, разлагается на две части: ток  $I_L$  в пучности тока катушки и эквивалентный ток  $I_{C_0}$ , соответствующий емкостной ветви эквивалентной схемы.

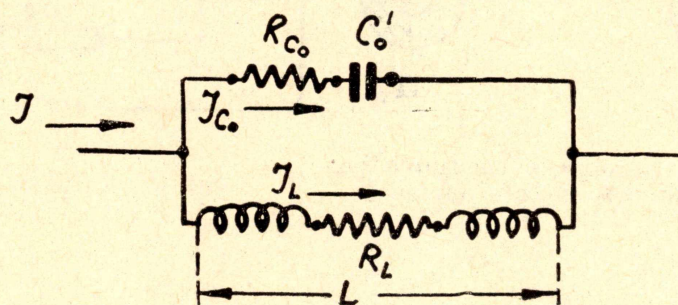


Рис. 4. Эквивалентная схема катушки

Как строгим, так и приближенным путем можно определить полный ток  $I$  и ток  $I_L$ . Отсюда определится и  $I_{C_0}$  как

$$I_{C_0} = I - I_L. \quad (23)$$

При условии малой величины эквивалентного сопротивления потерь в собственной емкости  $I_{C_0} = i\omega C_0 U$ , где  $U$  — падение напряжения на катушке.

Задачей нашего исследования является оценка влияния электрического поля в пространстве, между витками на добротность катушки, намотанной на каркас. Для технического решения указанной задачи необходимо определить собственную емкость катушки, а затем влияние диэлектрических свойств каркасного материала на добротность.

Поставленная задача может быть решена с помощью эквивалентных схем и сопоставления их с экспериментом. На рис. 5 приведены схемы для нескольких вариантов грубого расчета  $C'_0$  для случая, приближающегося к нашей задаче. Можно видеть из приведенного рис. 5, что для практических расчетов целесообразно пользоваться линейной зависимостью собственной емкости  $C'_0$ , имеющий вид (рис. 5, а).

$$C'_0 = C_1 + C_2 \varepsilon. \quad (24)$$

На рис. 6 дана схема, представляющая катушку в виде двухполюсника. Расчет показывает, что для добротности катушки  $Q$  справедлива формула [10]

$$Q = Q_1 (1 - Q_1 \omega^2 C_g L \text{tg } \delta), \quad (25)$$



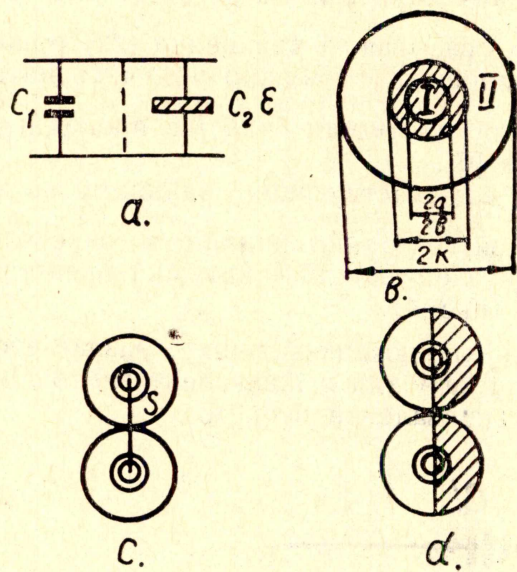


Рис. 5. Схемы нескольких вариантов расчета собственной емкости катушки

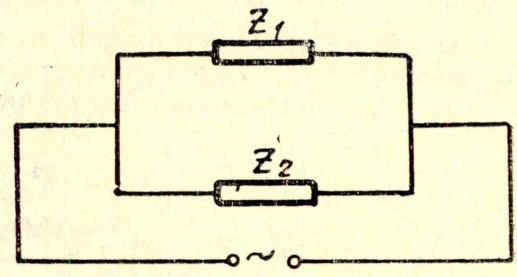


Рис. 6. Катушка-двухполюсник

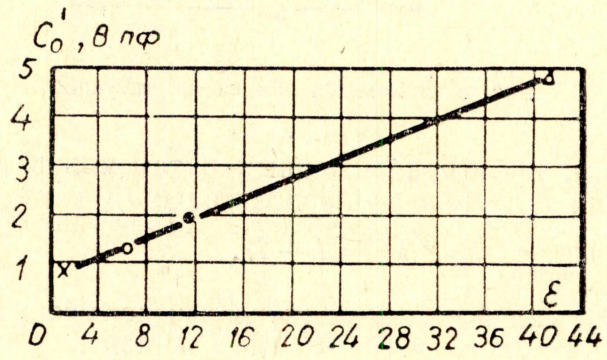


Рис. 7. Зависимость собственной емкости от диэлектрической проницаемости каркасного материала

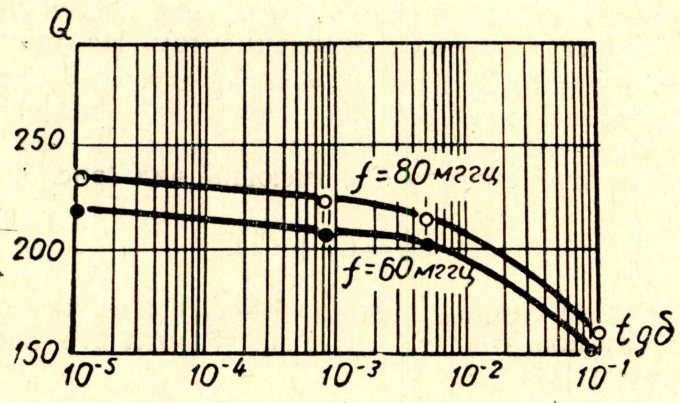


Рис. 8. Зависимость добротности от тангенса угла диэлектрических потерь каркасного материала

где  $Q_1$  — добротность при условии  $Q_1\omega^2 C_g \operatorname{tg} \delta \ll 1$  бескаркасной катушки;  
 $C_g$  — емкость через диэлектрик каркаса;  
 $L$  — индуктивность;

$\operatorname{tg} \delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь каркасного материала.

Предложенные нами формулы (24) и (25) дают хорошее совпадение с экспериментальными результатами. Для иллюстрации сказанного на рис. 7 и 8 приведены опытные данные, полученные нами при проверке (24) и (25).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников, А. М. Николаев. Основы радиотехники, ч. 1, 44, Связьрадиоиздат, 1950.
2. Р. Друде. *Ahn. der Phys*, vol. 9, P 293 (1902).
3. В. Ленц. *Ahn. der Phys*, vol. 37, p 923 (1912), 43, 749, 1914.
4. А. Зоммерфельд. *Ahn. der Phys*, vol. 24, 609, 1907.
5. Брейт. I. *Opt. Soc. of America*, 10, 65, 1925.
6. Галлен. *Astr. och Fysik*, B, 24A, № 5, Стокгольм, 1933.
7. Мустафа и Гохарт. *PIRE*, 41, 537, 1953.
8. В. Медхерст Р., *Wir. End.*, v. 24, № 291, 282, 1947.
9. Г. Т. Шитиков. Стабильные диапазонные автогенераторы. Изд. «Советское радио», 1965.
10. Р. М. Кессених. Изв. ТПИ, т. 95, 1958.