

УДК 512.541

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КАК АРТИНОВЫ ИЛИ НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Ч. 2

П.А. Крылов*, Е.И. Подберезина

*Томский государственный университет
Томский политехнический университет
E-mail: hggh45de@mail2000.ru

Описаны абелевы группы A и B такие, что группа гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы B . Описание групп A и B , для которых группа $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы A , сведена к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B – либо квазициклическая группа, либо делимая группа без кручения. Охарактеризованы абелевы группы A и B , для которых группа $\text{Hom}(A, B)$ есть нётеров модуль над кольцом $E(A)$ или $E(B)$. Исследование произвольной абелевой группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов сведено к исследованию группы без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов. Исследование группы с нётеровым справа кольцом эндоморфизмов осталось незавершённым. Описаны сепарабельные абелевы группы без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов.

Полностью решена проблема описания абелевых групп A и B таких, что левый $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов (теорема 3 [1. С. 178]). Ключом к решению этой проблемы служат следующие два предложения.

Предложение 1. Предположим, что A и B – такие группы, что $\text{Hom}(A, B)$ – артинов $E(B)$ -модуль или артинов $E(A)$ -модуль. Тогда для некоторого $m \in \mathbb{N}$ имеет место разложение

$$\text{Hom}(A, B) = m\text{Hom}(A, B) \oplus K,$$

где $m\text{Hom}(A, B)$ – делимая группа, K – ограниченная группа.

Предложение 2. Если $m\text{Hom}(A, B)$ – делимая группа для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то и mS – делимая группа.

Эти предложения раскрывают строение следа группы A в группе B при условии, что модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов. Нужно подчеркнуть, что это относится как к $E(B)$ -модулю $\text{Hom}(A, B)$, так и к $E(A)$ -модулю $\text{Hom}(A, B)$. Дело в том, что в основе доказательства предложений 1 и 2 лежит рассмотрение цепи $E(B)$ -подмодулей модуля $\text{Hom}(A, B)$, которая является также и цепью $E(A)$ -подмодулей этого модуля. Поэтому эти предложения важны и для изучения $\text{Hom}(A, B)$ как артинова модуля над кольцом $E(A)$.

Предложения 3, 4 и лемма 2 уточняют строение следа S и коследа A в предположении, что $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов.

Предложение 3. Если $\text{Hom}(A, B)$ – артинов $E(B)$ -модуль или $E(A)$ -модуль, то число делимых p -компонент следа S конечно.

Лемма 2. Подмодуль $\text{Hom}(Z(p^\infty), D_p)$ $E(B)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$ не является артиновым.

Предложение 4. Если $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов, то

$$\bar{A} = H \oplus \sum_m^{\oplus} Q \oplus G,$$

где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения и $m \in \mathbb{N}$.

Предложение 5. Пусть $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым $E(B)$ -модулем. Тогда для всякого p , относящегося к группе C , редуцированная p -компонента группы B ограничена. Группа $B = d(B) \oplus E \oplus V$, где $d(B)$ – делимая часть группы B ; E – ограниченная группа и всякое p , относящееся к E , относится и к C ; V – некоторая группа, причём $\text{Hom}(A, B) = 0$. След S – артинов $E(B)$ -модуль.

Предложение 5 интересно тем, что в нём полностью описано строение группы B такой, что $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов. Кроме того, это предложение утверждает, что след группы A в группе B является в этом случае артиновым $E(B)$ -модулем. Последний факт использован в доказательстве достаточности теоремы 3.

Теорема 3. Пусть A и B – некоторые группы. Левый $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда

$$S = D \oplus \sum_{\eta}^{\oplus} Q \oplus C,$$

где D – делимая периодическая группа с конечным числом p -компонент; C – ограниченная группа; η – некоторый кардинал, а

$$\bar{A} = H \oplus \sum_m^{\oplus} Q \oplus G,$$

где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения; $m \in N$ и для всякого p , относящегося к группе C , редуцированная p -компонента группы B ограничена.

Причём:

- если $D \neq 0$, то $\bar{A} = H \oplus G$, $r(G) < \infty$ и $r(G) = r_p(G)$ для всех p , относящихся к группе D ;
- если $D = 0$, но $\sum_m^{\oplus} Q \neq 0$, то $r(G) < \infty$;
- если S – ограниченная группа, то есть $S = C$, то $\bar{A} = H \oplus G$ и для любого p , относящегося к S , $r_p(G) < \infty$.

Теорема 3 относится к основным результатам исследования группы $\text{Hom}(A, B)$ как артинова $E(B)$ -модуля. Она даёт полное описание абелевых групп A и B таких, что $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов. Понятно, что предложения, о которых выше шла речь, являются существенной частью доказательства её необходимости. Как доказательство утверждений теоремы 3 о ранге (p -ранге) редуцированной части без кручения группы $\bar{A}$, так и доказательство её достаточности основано на построении индуцированных точных последовательностей $E(B)$ -модулей и теореме 1. В процессе доказательства необходимости теоремы 3 установлено, в частности, что $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(Q, D_p)$ не артинов.

Приведём несколько следствий теоремы 3 и записанных выше предложений.

Следствие 1. Пусть A и B – группы, причём B – редуцированная группа. Левый $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда S – ограниченная группа и для всякого p , относящегося к S , p -компонента группы B ограничена, а группа $\bar{A} = H \oplus G$, где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения и для каждого p , относящегося к S , $r_p(G) < \infty$.

Следствие 2. Пусть A и B – периодические группы. Левый $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов в том и только в том случае, если S – ограниченная группа, причём для любого p , относящегося к S , редуцированная p -компонента группы B ограничена, а $\bar{A}$ – конечная группа.

Следствие 3. Если A и B – группы без кручения, $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда S – делимая группа, а $\bar{A}$ – группа конечного ранга.

Укажем более точные соотношения между следом S , коследом $\bar{A}$ и группами A и B в случае, когда $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов. По предложению 5 имеем равенство $B = d(B) \oplus E \oplus V$, где $d(B)$ – делимая часть группы B ; E – ограниченная группа и всякое p , относящееся к E , относится и к C , причём $\text{Hom}(A, V) = 0$. Из

доказательства этого предложения [1. С. 177] заключаем, что $S = d(B) \oplus E[k]$, если $\bar{A} \neq H$ и $S = d(B)[t] \oplus E[k]$, если $\bar{A} = H$ для каких-то $k, t \in N$. В первом случае, $d(B) = D \oplus \sum_{\eta}^{\oplus} Q$, $C = E[k]$, во втором – $C = S = d(B)[t] \oplus E[k]$. Можно также привести некоторые общие условия, при которых $S = d(B) \oplus E$ или $S = E$, то есть след выделяется прямым слагаемым в группе B .

Следствие 4. 1) Пусть A и B – такие группы, как в следствии 1. Тогда имеем $B = E \oplus W$ и $S = E[k]$ для некоторого $k \in N$.

2) Если A и B – группы из следствия 2, то $A = A \oplus V$ для какой-то группы V , причём $\text{Hom}(A, V) = 0$, а $\bar{A}$ – конечная группа.

Следствие 5. Пусть A – группа без кручения, B – периодическая группа. Левый $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда $S = D \oplus C$, где D – делимая периодическая группа с конечным числом p -компонент, C – ограниченная группа, а $\bar{A} = \sum_m^{\oplus} Q \oplus G$, где $m \in N$, G – редуцированная группа без кручения и для любого p , относящегося к группе C , редуцированная p -компонента группы B ограничена, причём: а) если $D \neq 0$, то $\bar{A} = G$, $r(G) < \infty$ и $r(G) = r_p(G)$ для всех p , относящихся к D ; б) если $D = 0$, то есть если $S = C$, то $\bar{A} = G$ и для любого p , относящегося к группе S , $r_p(G) < \infty$.

Следствие 6. Пусть A – произвольная, а B – делимая группы. $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда

$$S = D \oplus \sum_{\eta}^{\oplus} Q,$$

где D – делимая периодическая группа с конечным числом p -компонент, η – некоторый кардинал, а

$$\bar{A} = H \oplus \sum_m^{\oplus} Q \oplus G,$$

где H – конечная группа, $m \in N$, G – редуцированная группа без кручения, причём: а) если $D \neq 0$, то $\bar{A} = H \oplus G$, $r(G) < \infty$ и $r(G) = r_p(G)$ для всех p , относящихся к группе D ; б) если $D = 0$, то есть если след S – делимая группа без кручения, то группа $\bar{A}$ тоже не имеет кручения и $r(G) < \infty$.

Следствие 7. Пусть A и B – делимые группы. $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда группы $\bar{A}$ и S являются группами без кручения, причём ранг группы $\bar{A}$ конечен.

Проблема описания групп A и B , для которых $\text{Hom}(A, B)$ – артинов $E(A)$ -модуль, сведена по существу к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B является одной из следующих групп: $Z(p)$, $Z(p^{\infty})$, Q (теорема 20 [2. С. 197]).

Договоримся через D_p (соответственно R_p) обозначать делимую (соответственно редуцированную) p -компоненту группы A . Затем T_p – вся p -компонента группы A , то есть $T_p = D_p \oplus R_p$.

Пусть группы A и B таковы, что правый $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов. Из предложений 1–3 следует, что в таком случае след S есть прямая сумма делимой группы и ограниченной группы. Поскольку $\text{Hom}(A, W)$ есть подмодуль $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$ для любой подгруппы $W \subseteq B$, то понятно, что группа S не может иметь бесконечных прямых разложений. Таким образом, если $\text{Hom}(A, B)$ – ар-

тинов $E(A)$ -модуль, то след S является прямой суммой делимой группы конечного ранга и конечной группы. Пример модуля $\text{Hom}(Z, Z(p^\infty))$ показывает, что при этом в следе действительно может присутствовать группа $Z(p^\infty)$.

Что касается строения коследа группы B в группе A для артинова $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$, то оно получено в предложениях 6 и 7.

Предложение 6. Если $D_p \neq 0$ и группа B содержит подгруппу $Z(p^\infty)$, то $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ не является артиновым.

Предложение 7. Если $\text{Hom}(A, B)$ — артинов $E(A)$ -модуль, то редуцированная p -компонента группы A ограничена для любого p , относящегося к группе B , и таких p -компонент конечное число.

Эти предложения вместе с выводом о строении следа группы A в группе B представляют собой доказательство необходимости теоремы 4, которая относится к основным результатам исследования группы $\text{Hom}(A, B)$ как артинова модуля над кольцом $E(A)$.

Обозначим буквами T и D соответственно периодическую и делимую части группы A .

Теорема 4. Пусть A и B — некоторые группы. $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме конечной группы и делимой группы конечного ранга; для каждого p , относящегося к группе B , редуцированная p -компонента группы A ограничена, группы A и B не содержат одновременно групп $Z(p^\infty)$; $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A/T, Z(p))$ артинов, если p относится к следу S , $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A/T, Z(p^\infty))$ артинов, если в следе S содержится группа $Z(p^\infty)$ и, наконец, $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A/(T+D), Q)$ артинов, если в следе S содержится группа Q .

Доказательство достаточности теоремы 4 опирается на использование индуцированных точных последовательностей $E(A)$ -модулей, теорему 1 и предложение 8.

Предложение 8. Допустим, что редуцированная p -компонента группы A ограничена. Тогда $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(T_p, Z(p^k))$ артинов для всякого $k \in \mathbb{N}$, где T_p — p -компонента группы A .

В [2. С. 194–195] рассмотрены примеры. Напомним, что η — некоторый кардинал.

Примеры 1. 1) Пусть $A = \sum_{\eta} Z(p)$ или $A = \sum_{\eta} Z$. Тогда $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, Z(p))$ неприводим.

2. Если $A = \sum_{\eta} Q$, то $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, Q)$ неприводим.

Эти примеры интересны сами по себе. $E(A)$ -модули, рассматриваемые в них, неприводимы, а значит, артиновы и нётеровы. Неприводимость $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, Z(p))$, где $A = \sum_{\eta} Z$, означает, что кослед группы B в группе A может содержать редуцированную группу без кручения бесконечного ранга, однако $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ будет артиновым, нётеровым (даже неприводимым). Эти примеры играют важную роль в доказательстве арти-

новости (нётеровости) некоторых подмодулей модуля $\text{Hom}(A, B)$. Так, доказательство нётеровости $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(D, Q)$, где D — делимая часть группы A , свелось в конечном счёте к доказательству нётеровости $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, Q)$, где $A = \sum_{\eta} Q$ из примера 1 (предложение 19). Доказательство артиновости $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(T_p, Z(p^k))$, где T_p — ограниченная p -компонента группы A , также свелось к доказательству артиновости $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, Z(p))$, где $A = \sum_{\eta} Z(p)$ из примера 1 (предложение 8). Это обстоятельство приобретает тем большее значение, что доказательство предложения 8 основано на построении индуцированных последовательностей $E(A)$ -модулей и обосновании неприводимости последних. Поэтому оно представляет собой доказательство и нётеровости указанного модуля. Эти примеры используются и в доказательстве теоремы 4.

В связи с доказательством теоремы 4 необходимо сделать следующие замечания.

1. Доказательство артиновости модуля $\text{Hom}(A, Q)$ показывает, что в теореме 4 вместо артиновости модуля $\text{Hom}(A/(T+D), Q)$ можно требовать артиновость модуля $\text{Hom}(A/D, Q)$ или модуля $\text{Hom}(A/T, Q)$.
2. Представим группу A в виде $A = R \oplus D$, где R — редуцированная, D — делимая группы. Тогда $T+D = t(R) \oplus D$ (здесь $t(R)$ — периодическая часть группы R). Имеет место изоморфизм $A/(T+D) \cong R/t(R)$, где на группе без кручения $R/t(R)$ определённым способом может быть задана структура левого $E(A)$ -модуля.
3. Теорема 4 в некотором смысле сводит решение проблемы артиновости $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$ к исследованию артиновости модулей $\text{Hom}(A, Z(p))$, $\text{Hom}(A, Z(p^\infty))$, $\text{Hom}(A, Q)$, где группа A является группой без кручения и по существу рассматривается как модуль над некоторым подкольцом кольца $E(A)$. Действительно, если A — произвольная группа, то в силу теоремы 4 возможно придётся исследовать артиновость $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A/T, Z(p))$. Существует канонический кольцевой гомоморфизм $E(A) \rightarrow E(A/T)$. Если он является сюръективным, то подмодули $E(A)$ -модуля и $E(A/T)$ -модуля совпадают. Однако, вообще, это не так. Так же обстоит дело и с $E(A)$ -модулями $\text{Hom}(A/T, Z(p^\infty))$ и $\text{Hom}(A/(T+D), Q)$.

Рассмотрим подробнее строение следа S и коследа $\bar{A}$, а также самих групп A и B , если $\text{Hom}(A, B)$ — артинов $E(A)$ -модуль. Для этого будут нужны следующие три леммы.

Лемма 3. Допустим, что делимая группа D содержит одну из групп $Z(p^\infty)$ или Q . Тогда $E(D)$ -модуль $\text{Hom}(D, Z(p^\infty))$ не является артиновым.

Лемма 4. Предположим, что делимая часть D группы A содержит либо группу $Z(p^\infty)$, либо группу Q . Тогда $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, Z(p^\infty))$ не является артиновым.

Лемма 5. Если смешанная группа A является p -делимой, то есть $A=pA$, то $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, Z(p^\infty))$ не является артиновым.

Пусть теперь группы A и B обладают тем свойством, что правый $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов. На основании предложений 6 и 7 можно написать

$$A = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_k} \oplus D_0 \oplus V,$$

где R_{p_i} ($i=1, \dots, k$) – редуцированные p -компоненты группы A для некоторых p , относящихся к S , являющиеся ограниченными группами, D_0 – делимая группа без кручения, V – некоторая группа. При этом $\iota(V) \subseteq K_B(A) \subseteq V$ и $K_B(A) = K_B(V)$ (здесь $\iota(V)$ – периодическая часть группы V). Разумеется, какие-то слагаемые в записанной сумме могут отсутствовать. Так, ввиду леммы 4 $D_0=0$, если в S имеется группа $Z(p^\infty)$. Для коследа $\bar{A}$ имеем

$$\bar{A} = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_k} \oplus D_0 \oplus V/K_B(A).$$

Можно проанализировать строение фактор-группы $V/K_B(V)$ в зависимости от строения следа S . Не вникая в детали, обратим внимание лишь на несколько основных моментов. Если S – конечная группа, то

$$\bar{A} = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_k} \oplus V/K_B(V),$$

где $V/K_B(V)$ – ограниченная группа. В случае, когда в S присутствует группа Q , имеем

$$\bar{A} = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_k} \oplus D_0 \oplus V/K_B(V),$$

где $V/K_B(V)=0$, либо $V/K_B(V)$ – группа без кручения. Наконец, если след S содержит группу $Z(p^\infty)$, то

$$\bar{A} = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_k} \oplus V/K_B(V),$$

где $V/K_B(V)$ – редуцированная группа без кручения, причём она не делится на p . Действительно, допустим, что $V/K_B(V)$ – p -делимая группа. Обозначив $R = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_k}$, найдём, что $E(A)$ -модуль $\bar{A}/R$ не имеет кручения и не делится на p как группа. Так же как в леммах 4 и 5 можно показать, что не является артиновым правый $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(\bar{A}/R, Z(p^\infty))$, чего не может быть.

Обратившись к следу S , на основании имеющейся у нас информации можно записать $B = F \oplus E \oplus W$, где F – конечная группа, E – делимая группа конечного ранга, а $\text{Hom}(A, W)=0$. Некоторых из слагаемых F , E , W может не быть. Для следа S получаем $S = F[m] \oplus E$ для какого-то $m \in \mathbb{N}$. Дальнейшим поиском более точных соотношений между коследом $\bar{A}$ и следом S мы заниматься не будем. Укажем только, что открыт такой вопрос. Может ли след S содержать группы $Z(p^\infty)$ и Q ?

Из теорем 3 и 4 легко вытекает известная теорема 111.3 из книги [3].

Теорема. Кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A является артиновым слева (или справа) тогда и только тогда, когда $A = B \oplus D$, где B – конечная группа, а D – делимая группа без кручения конечного ранга.

Отметим, что теорема 2 в части эндоартинowości соответствует случаю $E(B)$ -модуля $\text{Hom}(Z, B)$ в теореме 3. Теорема 4 а также результаты заметки [4] вызывают такой вопрос. Для каких групп без кручения A $E(A)$ -модули $\text{Hom}(A, Q)$, $\text{Hom}(A, Z(p))$ и $\text{Hom}(A, Z(p^\infty))$ являются: неприводимыми, артиновыми, нётеровыми?

Приведём несколько следствий теоремы 4.

Следствие 8. Пусть A – произвольная, B – редуцированная группы. $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда след S есть конечная группа; для каждого p , относящегося к группе B , редуцированная p -компонента группы A ограничена; $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A/T, Z(p))$ артинов для всякого p , относящегося к следу S .

Следствие 9. Если A и B – периодические группы, то $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов в том и только в том случае, когда след S – конечная группа и для каждого p , относящегося к группе B , редуцированная p -компонента группы A ограничена.

Следствие 10. Пусть A и B – делимые группы. $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ и S – делимые группы без кручения и ранг группы S конечен.

Из теорем 3 и 4 можно вывести условия одновременной артиновости $E(A)$ -модуля и $E(B)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$.

Следствие 11. Пусть A – произвольная, B – редуцированная группы. Группа $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым $E(A)$ -модулем и одновременно артиновым $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда след S – конечная группа; для любого p , относящегося к следу S , редуцированная p -компонента группы B ограничена; для каждого p , относящегося к группе B , редуцированная p -компонента группы A ограничена; $\bar{A} = H \oplus G$, где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения и для любого p , относящегося к следу S , $r_p(G) < \infty$; $E(A)$ -модуль $\text{Hom}(A/T, Z(p))$ артинов для каждого p , относящегося к следу S .

Следствие 12. Пусть A и B – периодические группы. Группа $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым $E(A)$ -модулем и одновременно артиновым $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда группы $\bar{A}$ и S конечны; для каждого p , относящегося к группе S , редуцированная p -компонента группы B ограничена; для любого p , относящегося к группе B , редуцированная p -компонента группы A ограничена.

Следствие 13. Пусть A и B – делимые группы. Группа $\text{Hom}(A, B)$ является артиновым $E(A)$ -модулем и артиновым $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда группы $\bar{A}$ и S являются делимыми группами без кручения конечного ранга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа $\text{Hom}(A, B)$ как артинов $E(B)$ -модуль // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 170–184.
2. Подберезина Е.И. Об артиновости $E(A)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$ // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 190–199.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
4. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Строение смешанных абелевых групп с нётеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – Вып. 11–12. – С. 121–129.