УДК 519.865

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, А.В. Цитко

Томский государственный университет

*Томский политехнический университет

E-mail: svrhm@rambler.ru

На основе метода динамического программирования Беллмана приводится исследование задачи формирования портфеля ценных бумаг, как задачи оптимального управления капиталом портфеля в смысле минимизации функционала, характеризующего его отклонения от капитала эталонного портфеля.

1. Введение

На первом этапе теория финансов сводилась к подсчету простых и сложных процентов, и основной вопрос был связан с администрированием и увеличением фондов и капитала. Последующее развитие теории шло в предположении условий: 1) полной определенности [1]; 2) неопределенности [2]. В первом случае рассматривались вопросы оптимальных решений на финансовом рынке в условиях полной определенности (в вероятностном смысле), и с математической точки зрения задачи сводились к максимизации функций многих переменных при наличии ограничений. Во втором случае основной задачей являлась проблема инвестиционных решений участников финансового рынка в условиях неопределенности. Используемый математический аппарат «mean-variance analysis», основанный на теории вероятностей, выявил важную роль ковариаций в стоимостях рискованных активов, как показателя, от которого зависит степень риска портфеля ценных бумаг. Современный этап развития теории связан: 1) с описанием процесса изменения стоимости рискованных активов в виде случайного процесса [3]; 2) с формулировкой задачи формирования портфеля, как задачи оптимального управления стохастической системой [4].

В данной работе на основе математической теории оптимальных процессов с применением принципа динамического программирования Беллмана [5] рассматривается одна задача формирования портфеля ценных бумаг, допускающая точное аналитическое решение.

2. Постановка задачи

Пусть $S(t)$ – цена рискованного актива (например, акции), которая определяется стохастическим дифференциальным уравнением [3]

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(t_0) = S_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $S_0 > 0$, а $B(t)$ – цена безрискового актива (например, банковский счет), которая определяется уравнением

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad B(t_0) = B_0, \quad (2)$$

где $r > 0$, $B_0 > 0$ и решение которого имеет вид

$$B(t) = B_0 e^{r(t-t_0)}. \quad (3)$$

Капитал портфеля будем обозначать $X(t)$. В текущий момент времени t доля капитала $u(t)$ вкладывается в рискованный актив, а доля капитала $\tilde{u}(t) = 1 - u(t)$ вкладывается в безрисковый актив, то есть

$$S(t) = u(t)X(t), \quad (4)$$

$$B(t) = [1 - u(t)]X(t).$$

Из (4) следует

$$S(t) + B(t) = X(t). \quad (5)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет капитал $X(t)$. Из (5) следует

$$dX(t) = dS(t) + dB(t). \quad (6)$$

Используя (1), (2), (4) в (6), получим

$$dX(t) = [r + (a - r)u(t)]X(t)dt + \sigma u(t)X(t)dW(t), \quad (7)$$

$$t \geq t_0, \quad X(t_0) = X_0.$$

Введем стоимость эталонного портфеля $Y(t)$, которая определяется следующим дифференциальным уравнением

$$dY(t) = \mu Y(t)dt, \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (8)$$

Очевидно, что

$$Y(t) = Y_0 e^{\mu(t-t_0)}. \quad (9)$$

Ставится задача: таким образом распределять капитал $X(t)$ между рискованным $S(t)$ и безрисковым $B(t)$ активами, то есть таким образом сформировать управление $u(t)$, чтобы капитал портфеля $X(t)$ соответствовал (в каком-то смысле) стоимости эталонного портфеля $Y(t)$.

Формализуем задачу. Пусть $t \in [0, t_1]$, то есть $t_0 = 0$. В качестве меры расхождения в текущий момент времени t между капиталом $X(t)$ и стоимостью эталонного портфеля $Y(t)$ выберем величину $[X(t) - Y(t)]^2$, а в момент времени t_1 – величину $[X(t_1) - Y(t_1)]^2$. Таким образом, в качестве интегральной меры расхождения между портфелями может быть взят функционал

$$J = M \{ [X(t_1) - Y(t_1)]^2 + \int_0^{t_1} [X(t) - Y(t)]^2 dt | X(t_0) = X_0 \}, \quad (10)$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания. В результате пришли к следующей задаче *оптимального управления*: найти управление $u(t)$, чтобы на траекториях стохастического дифференциального уравнения (7) функционал (10) достигал минимума.

Замечание 1. Согласно (4), (5) для управления $u(t)$ должно выполняться ограничение

$$0 \leq u(t) \leq 1. \quad (11)$$

Поэтому, решение поставленной задачи может быть достигнуто: без учета (11), а полученное решение анализируется на предмет его выполнения; с учетом (11); без учета (11). В последней ситуации: а) если $u(t) < 0$, то считается, что рисковый актив берется в долг; б) если $u(t) > 0$, то $\tilde{u}(t) = 1 - u(t) < 0$, и в долг берется безрисковый актив. Таким образом, первый и третий пути решения аналогичны, но в третьем случае не проводится анализ на предмет выполнения условия (11).

Замечание 2. Смысловое содержание параметров a , σ , r и μ , которыми определяется постановка задачи, заключается в следующем. Параметры r и μ являются параметрами роста соответственно стоимостей безрискового актива и эталонного портфеля, т.е. являются банковскими процентами по соответствующим активам. По смысловому содержанию $r > 0$ и $\mu > 0$. Параметр σ является параметром волатильности и характеризует степень хаотичности изменения цены рискового актива. По смысловому содержанию $\sigma > 0$. Параметр a является параметром изменчивости и характеризует тенденцию изменения цены рискового актива в среднем. По смысловому содержанию $a \leq 0$. При $a = 0$ цена рискового актива S_i будучи случайной, в среднем изменяется возле начального значения S_0 , при $a > 0$ в среднем возрастает, а при $a < 0$ – в среднем убывает. С точки зрения теории случайных процессов S_i ведет себя соответственно как мартингал, как субмартингал, как супермартингал [6].

3. Исследование капитала при произвольном управлении

Пусть

$$\tilde{X}(t) = \ln \{X(t)\}. \quad (12)$$

Тогда, используя формулу стохастического дифференцирования Ито [6], получаем с учетом (7), что

$$\begin{aligned} d\tilde{X}(t) &= \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} \sigma^2 u^2(t) X^2(t) dt = \\ &= [r + (a - r)u(t)] dt + \sigma u(t) dW(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{X}(t)$ определяется уравнением

$$d\tilde{X}(t) = [r + (a - r)u(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2(t)] dt + \sigma u(t) dW(t). \quad (13)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= \tilde{X}_0 + \int_0^t [r + (a - r)u(\tau) - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2(\tau)] d\tau + \\ &+ \sigma \int_0^t u(\tau) dW(\tau) = \tilde{X}_0 + rt + \\ &+ \int_0^t u(\tau) [(a - r) - \frac{1}{2} \sigma^2 u(\tau)] d\tau + \sigma \int_0^t u(\tau) dW(\tau). \quad (14) \end{aligned}$$

Так как $X(t) = \exp\{\tilde{X}(t)\}$, то из (14) следует, что капитал $X(t)$ портфеля определяется формулой

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 \exp \{rt\} \exp \left\{ \int_0^t u(\tau) [(a - r) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \sigma^2 u(\tau)] d\tau + \sigma \int_0^t u(\tau) dW(\tau) \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Из (15) получаем, что

$$X(t) > 0. \quad (16)$$

Таким образом, получили, что при любом управлении, то есть при произвольном перераспределении капитала между рисковым и безрисковым активами, капитал остается положительным. Данное свойство свидетельствует о корректности математической модели.

4. Решение задачи

Поставленная задача решается без учета ограничения (11).

Утверждение 1. Функция Беллмана $U(t, X)$ для поставленной задачи оптимального управления имеет представление

$$U(t, X) = b_0(t) + b_1(t)X + \frac{1}{2} b_2(t)X^2, \quad (17)$$

где $b_0(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определяются дифференциальными уравнениями (точка сверху означает производную по t)

$$\dot{b}_0(t) = \frac{1}{2} \frac{(a - r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} - Y^2(t), \quad (18)$$

$$\dot{b}_1(t) = \frac{(a - r)^2}{\sigma^2} b_1(t) - r b_1(t) + 2Y(t), \quad (19)$$

$$\dot{b}_2(t) = \frac{(a - r)^2}{\sigma^2} b_2(t) - 2r b_2(t) - 2 \quad (20)$$

с граничными условиями

$$b_0(t_1) = Y^2(t_1), \quad b_1(t_1) = -2Y(t_1), \quad b_2(t_1) = 2. \quad (21)$$

Доказательство. По определению [5] согласно (10)

$$\begin{aligned} U(t, X) &= \min_u M \{ [X(t_1) - Y(t_1)]^2 + \\ &+ \int_t^{t_1} [X(\tau) - Y(\tau)]^2 d\tau \mid X(t) = X \}. \quad (22) \end{aligned}$$

Тогда, согласно (7), (10), уравнение Беллмана имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \min_u \left\{ \frac{\partial U(t, X)}{\partial t} + [r + (a - r)u] X \frac{\partial U(t, X)}{\partial X} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U(t, X)}{\partial X^2} + [X - Y(t)]^2 \right\} = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

с граничным условием

$$U(t_1, X) = [X - Y(t_1)]^2. \quad (24)$$

Необходимое условие минимума $\frac{\partial}{\partial u} \{ \} = 0$ в (23) приводит к уравнению

$$(a-r)X \frac{\partial U(t, X)}{X} + \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U(t, X)}{\partial X^2} u = 0.$$

Отсюда получаем выражение для оптимального управления через функцию Беллмана в виде

$$u^0(t) = - \frac{(a-r) \frac{\partial U(t, X)}{\partial X}}{\sigma^2 X \frac{\partial^2 U(t, X)}{\partial X^2}}. \quad (25)$$

Подстановка (25) в (23) приводит к уравнению для функции Беллмана в частных производных вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(t, X)}{\partial t} + rX \frac{\partial U(t, X)}{\partial X} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \left(\frac{\partial U(t, X)}{\partial X} \right)^2 + \\ & + X^2 - 2Y(t)X + Y^2(t) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Граничное условие следует из (24)

$$U(t, X)|_{t=t_1} = X^2 - 2Y(t_1)X + Y^2(t_1). \quad (27)$$

Согласно методу разделения переменных [7] решение ищем в виде (17). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, X)}{\partial t} &= \dot{b}_0(t) + \dot{b}_1(t)X + \frac{1}{2}\dot{b}_2(t)X^2, \\ \frac{\partial U(t, X)}{\partial X} &= b_1(t) + b_2(t)X, \\ \frac{\partial^2 U(t, X)}{\partial X^2} &= b_2(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (26), получим

$$\begin{aligned} & \dot{b}_0(t) + \dot{b}_1(t)X + \frac{1}{2}\dot{b}_2(t)X^2 + rb_1(t)X + rb_2(t)X^2 - \\ & - \frac{1}{2} \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1^2(t) + b_2^2(t)X^2 + 2b_1(t)b_2(t)X}{b_2(t)} + \\ & + X^2 - 2Y(t)X + Y^2(t) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} & \dot{b}_0(t) - \frac{1}{2} \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} + Y^2(t) + \\ & + \dot{b}_1(t)X + rb_1(t)X - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} b_1(t)X - 2Y(t)X + \\ & + \frac{1}{2}\dot{b}_2(t)X^2 + rb_2(t)X^2 - \\ & - \frac{1}{2} \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} b_2(t)X^2 + X^2 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

В соответствии с методом разделения переменных, приравнявая в (30) коэффициенты при одинаковых степенях X , приходим к уравнениям (18–20). Граничные уравнения (21) следуют из (17), (27).

Утверждение 2. Решения уравнений (18–20) с граничными условиями (21) имеют вид

$$b_1(t) = [b_1^1 e^{(\mu-\beta)t} - b_1^2] e^{\beta t}, \quad (31)$$

$$b_2(t) = b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} b_0(t) &= X_0^2 e^{2\mu t} + \frac{X_0^2}{2\mu} (e^{2\mu t} - e^{2\mu t}) + \\ & + \frac{X_0^2}{2} \frac{(r+\beta)\sqrt{r-\beta}}{\sqrt{1+\frac{1}{r-\beta}}} \times \\ & \times \left[\frac{e^{\frac{(r+\beta)t_1}{2}}}{\mu(\mu-\beta)} - \frac{2\left(1+\frac{1}{\mu-\beta}\right)}{\mu^2-\beta^2} e^{\left(\mu-\frac{r+\beta}{2}\right)t_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\left(1+\frac{1}{\mu+\beta}\right)^2}{\beta} e^{\left(2\mu-\frac{r+3\beta}{2}\right)t_1} \right] \times \\ & \times \ln \left[\frac{\left(\sqrt{d} - e^{\frac{(r-\beta)t_1}{2}}\right) \left(\sqrt{d} + e^{\frac{(r-\beta)t_1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{d} + e^{\frac{(r-\beta)t_1}{2}}\right) \left(\sqrt{d} - e^{\frac{(r-\beta)t_1}{2}}\right)} \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\beta = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} - r, \quad (34)$$

$$b_1^1 = \frac{2X_0}{\mu-\beta}, \quad b_1^2 = 2X_0 \left(1 + \frac{1}{\mu-\beta}\right) e^{(\mu-\beta)t_1}, \quad (35)$$

$$b_2^1 = 2 \left(1 + \frac{1}{r-\beta}\right) e^{(r-\beta)t_1}, \quad b_2^2 = \frac{2}{r-\beta}, \quad (36)$$

$$d = b_2^2 / b_2^1. \quad (37)$$

Доказательство. Решение ур. (19). Полагая $Y_0 = X_0, t_0 = 0$, из (9) следует

$$Y(t) = X_0 e^{\mu t}, \quad Y(t_1) = X_0 e^{\mu t_1}. \quad (38)$$

Используя обозначение (34), получаем из (19), (21), (38)

$$\dot{b}_1(t) = \beta b_1(t) + 2X_0 e^{\mu t}, \quad b_1(t_1) = -2X_0 e^{\mu t_1}. \quad (39)$$

Общее решение однородного уравнения $\dot{b}_1(t) = \beta b_1(t)$ имеет вид

$$b_1(t) = c(t) e^{\beta t}. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39), получаем уравнение для нахождения $c(t)$ в виде $\dot{c}(t) = 2X_0 e^{(\mu-\beta)t}$, общее решение которого имеет вид

$$c(t) = \frac{2X_0}{(\mu-\beta)} e^{(\mu-\beta)t} + c_1. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40), получаем общее решение уравнения (39)

$$b_1(t) = \frac{2X_0}{(\mu - \beta)} e^{\mu t} + c_1 e^{\beta t}. \quad (42)$$

Константа c_1 находится из (42) и из граничного условия (39) с учетом (42)

$$\frac{2X_0}{(\mu - \beta)} e^{\mu t_1} + c_1 e^{\beta t_1} = -2X_0 e^{\mu t_1}.$$

Отсюда

$$c_1 = -2 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta} \right) X_0 e^{(\mu - \beta)t_1}.$$

Тогда, согласно (42),

$$b_1(t) = \frac{2X_0}{\mu - \beta} e^{\mu t} - 2X_0 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta} \right) e^{(\mu - \beta)t_1} e^{\beta t}.$$

В итоге с использованием обозначений (35) получаем (31).

Решение ур. (20). Из (20), (21) с учетом (34) следует

$$\dot{b}_2(t) = (\beta - r)b_2(t) - 2, \quad b_2(t_1) = 2. \quad (43)$$

Общее решение однородного уравнения $\dot{b}_2(t) = (\beta - r)b_2(t)$ имеет вид

$$b_2(t) = c(t) e^{(\beta - r)t}. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43) получим уравнение для нахождения $c(t)$ в виде $\dot{c}(t) = -2e^{-(\beta - r)t}$, общее решение которого имеет вид

$$c(t) = \frac{2}{\beta - r} e^{-(\beta - r)t} + c_1. \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44), получаем общее решение уравнения (43)

$$b_2(t) = \frac{2}{\beta - r} + c_1 e^{(\beta - r)t}. \quad (46)$$

Константа c_1 находится из граничного условия (43) с учетом (46)

$$\frac{2}{\beta - r} + c_1 e^{(\beta - r)t_1} = 2.$$

Отсюда

$$c_1 = 2 \left(1 - \frac{1}{\beta - r} \right) e^{-(\beta - r)t_1}.$$

Тогда, согласно (46),

$$b_2(t) = \frac{2}{\beta - r} + 2 \left(1 - \frac{1}{\beta - r} \right) e^{-(\beta - r)t_1} e^{(\beta - r)t}. \quad (47)$$

Перепишем (47) следующим образом

$$b_2(t) = 2 \left(1 + \frac{1}{r - \beta} \right) e^{(r - \beta)t_1} e^{-(r - \beta)t} - \frac{2}{r - \beta}. \quad (48)$$

Из (48), используя обозначения (36), получаем (32).

Решение ур. (18). Из (18), (21), (38) с учетом (31), (32), (34) последовательно получаем:

$$\dot{b}_0(t) = \frac{1}{2}(\beta + r) \frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} - X_0^2 e^{2\mu t}, \quad b_0(t_1) = X_0^2 e^{2\mu t_1};$$

$$b_0(t) = \frac{1}{2}(\beta + r) \int \frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} dt - X_0^2 \int e^{2\mu t} dt + C;$$

$$b_0(t) = \frac{1}{2}(\beta + r) \left\{ \int \frac{(b_1^1)^2 e^{2\mu t} - 2b_1^1 b_1^2 e^{(\mu + \beta)t} + (b_1^2)^2 e^{2\beta t}}{b_2^1 e^{-(r - \beta)t} - b_2^2} dt \right\} - \frac{X_0^2}{2\mu} e^{2\mu t} = \frac{1}{2}(\beta + r) \{ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \} - \frac{X_0^2}{2\mu} e^{2\mu t}, \quad (49)$$

$$\gamma_1 = \int \frac{(b_1^1)^2 e^{2\mu t}}{b_2^1 e^{-(r - \beta)t} - b_2^2} dt, \quad \gamma_2 = - \int \frac{2b_1^1 b_1^2 e^{(\mu + \beta)t}}{b_2^1 e^{-(r - \beta)t} - b_2^2} dt, \quad (50)$$

$$\gamma_3 = \int \frac{(b_1^2)^2 e^{2\beta t}}{b_2^1 e^{-(r - \beta)t} - b_2^2} dt.$$

Тогда, из (50) с учетом обозначения (37), получаем

$$\gamma_1 = \frac{X_0^2 \sqrt{r - \beta} e^{-\frac{(r - \beta)t_1}{2}}}{\mu(\mu - \beta) \sqrt{1 + \frac{1}{r - \beta}}} \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r - \beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r - \beta)t}{2}}} \right|, \quad (51)$$

$$\gamma_2 = - \frac{2X_0^2 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta} \right) \sqrt{r - \beta} e^{-\left(\mu - \frac{r + \beta}{2} \right) t_1}}{(\mu^2 - \beta^2) \sqrt{1 + \frac{1}{r - \beta}}} \times \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r - \beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r - \beta)t}{2}}} \right|, \quad (52)$$

$$\gamma_3 = \frac{X_0^2 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta} \right)^2 \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{r - \beta} \right)} e^{\left(2\mu - \frac{r + 3\beta}{2} \right) t_1}}{\beta \left(1 + \frac{1}{r - \beta} \right)^2 e^{(r - \beta)t_1} \sqrt{2}} \times \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r - \beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r - \beta)t}{2}}} \right|. \quad (53)$$

Подстановка (51–53) в (49) приводит к (33), где

$$C = X_0^2 e^{2\mu t_1} + \frac{X_0^2}{2\mu} e^{2\mu t_1} - \frac{1}{2} \frac{X_0^2 (r + \beta) \sqrt{r - \beta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{r - \beta}}} \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r - \beta)t_1}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r - \beta)t_1}{2}}} \right| \times \left(\frac{e^{-\frac{(r - \beta)t_1}{2}}}{\mu(\mu - \beta)} - \frac{2 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta}\right)}{\mu^2 - \beta^2} e^{\left(\mu - \frac{r + \beta}{2}\right)t_1} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\mu - \beta}\right)^2}{\beta} e^{\left(2\mu - \frac{r + 3\beta}{2}\right)t_1} \right).$$

Теорема. Оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующее ему оптимальное значение критерия качества J^0 определяются формулами

$$u^0(t) = -\frac{(a - r)[b_1(t) + b_2(t)X(t)]}{\sigma^2 b_2(t)X(t)}, \quad (54)$$

$$J^0 = b_0(0) + b_1(0)X_0 + \frac{1}{2}b_2(0)X_0^2, \quad (55)$$

где $b_1(t)$, $b_2(t)$ определены в Утверждении 2, а $b_0(0)$, $b_1(0)$, $b_2(0)$ имеют вид

$$b_0(0) = X_0^2 e^{2\mu t_1} + \frac{X_0^2}{2\mu} (e^{2\mu t_1} - 1) + \frac{X_0^2 (r + \beta) \sqrt{r - \beta}}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{r - \beta}}} \times \left(\frac{e^{-\frac{r - \beta}{2} t_1}}{\mu(\mu - \beta)} - \frac{2 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta}\right)}{\mu^2 - \beta^2} e^{\left(\mu - \frac{r + \beta}{2}\right)t_1} + \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu + \beta}\right)^2}{\beta} e^{\left(2\mu - \frac{r + 3\beta}{2}\right)t_1} \right) \ln \left| \frac{(\sqrt{d} + 1) \left(\sqrt{d} - e^{-\frac{r - \beta}{2} t_1}\right)}{(\sqrt{d} - 1) \left(\sqrt{d} + e^{-\frac{r - \beta}{2} t_1}\right)} \right|. \quad (56)$$

$$b_1(0) = \frac{2X_0}{\mu - \beta} - 2X_0 \left(1 + \frac{1}{\mu - \beta}\right) e^{(\mu - \beta)t_1},$$

$$b_2(0) = 2 \left(1 + \frac{1}{r - \beta}\right) e^{(r - \beta)t_1} - \frac{2}{r - \beta}.$$

Доказательство. Использование (28) в (25) дает (54). Так как, по определению $J^0 = U(0, X_0)$, то (55) следует из (17), а (56) из (31–33).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Modigliani F., Miller M. The cost of capital, corporation finance, and theory of investment // American Economic Review. – 1958. – № 6. – P. 261–297.
2. Markowitz H. Mean-Variance analysis in portfolio choice and capital markets. – Cambridge, Massachusetts: Blackwell, 1990. – 387 p.
3. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. – 1965. – № 6. – P. 13–31.

В заключение рассмотрим вопрос о выполнении достаточного условия минимума $\frac{\partial^2 \{J\}}{\partial u^2} > 0$ в (23), которое сводится к условию

$$\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U(t, X)}{\partial X^2} > 0.$$

Тогда, согласно (16), (28), достаточное условие минимума определяется положительной определенностью функции $b_2(t)$, т.е.

$$b_2(t) > 0.$$

Из (32), (36) следует

$$b_2(t) = 2 \left[\left(1 + \frac{1}{r - \beta}\right) e^{(r - \beta)(t_1 - t)} - \frac{1}{r - \beta} \right].$$

Тогда условие $b_2(t) > 0$ сводится к условию

$$\left[\left(1 + \frac{1}{r - \beta}\right) e^{(r - \beta)(t_1 - t)} - \frac{1}{r - \beta} \right] > 0,$$

или к эквивалентному ему условию

$$\left(\frac{1 + (r - \beta)}{r - \beta} \right) e^{(r - \beta)(t_1 - t)} > \frac{1}{r - \beta}.$$

Если $r > \beta$, то $(r - \beta)(t_1 - t) \geq 0$ и тогда $[1 + (r - \beta)] e^{(r - \beta)(t_1 - t)} > 1$. Таким образом, при $r > \beta$ условие $b_2(t) > 0$ выполняется.

5. Заключение

1. Задача формирования портфеля ценных бумаг, состоящего из рискового и безрискового активов, сформулирована как задача оптимального управления стохастической системой (7) с критерием качества (10).
2. На основе метода динамического программирования с использованием уравнения Беллмана (23) найдено оптимальное управление (54) и значение критерия (55), достигаемое при оптимальном управлении.
3. Предварительный анализ решения показывает, что структура управления, т.е. перераспределение капитала между рисковыми и безрисковыми активами (см. Замечание 1), и значение критерия качества, определяющее качество отслеживания капиталом портфеля капитала эталонного портфеля, зависят от соотношений между параметрами постановки задачи (см. Замечание 2). Этим исследованиям с экономической интерпретацией результатов и графическими иллюстрациями будет посвящена следующая работа.

4. Merton R. Continuous-time finance. – Cambridge, Oxford: Blackwell, 1990. – 732 p.
5. Ройтенберг Я.И. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 551 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.