ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАСТИНКИ

Т. А. ЛУКОВСКАЯ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

Решение симметричной задачи для бесконечно тонкой немагнитной пластинки было получено Ю. К. Федосенко [1] в 1965 г. Впервые задача была поставлена Штейдингером [2], затем рассматривалась А. Б. Сапожниковым [3], но решений, пригодных для вычислений, не было получено.

Мы будем рассматривать ферромагнитную пластинку, поперечное сечение которой образует область $\left(-\frac{\delta}{2} \leqslant z \leqslant +\frac{\delta}{2}\right)$ с магнитной проницаемостью μ, проводимостью σ, движущуюся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси OX.

Рассмотрим следующие три случая.

§ 1. Металлическая пластинка движется в постоянном поле двух одноименных полюсов, расположенных на расстоянии h по обе стороны от поверхности пластинки, рис. 1. Обозначим через $u = A_y$ составляющую вектор потенциала A по оси OY в области $-\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2}$, u_0^+ — составляющую первичного поля в области $z > \frac{\delta}{2}$. u_0^- — составляющую первичного поля в области $z < -\frac{\delta}{2}$. Составляющую вторичного поля обозначим:

$$u^+ \text{ — в области } z > \frac{\delta}{2},$$

$$u^- \text{ — в области } z < -\frac{\delta}{2}.$$

В случае линейного магнита:

$$u_0^+ = m \int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}-z\right|\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha;$$

$$u_0^- = m \int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}+z\right|\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

В главе 22 [3] показано, что задача сводится к решению уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^2} = 0 \qquad z > \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad -\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial z^2} = 0 \qquad z < -\frac{\delta}{2}, \tag{3}$$

где $\omega = 4\pi\sigma\mu v \cdot 10^{-9}$.

Допустим, что внешняя среда по отношению к пластинке — воздух ($\mu_0 = 1$).

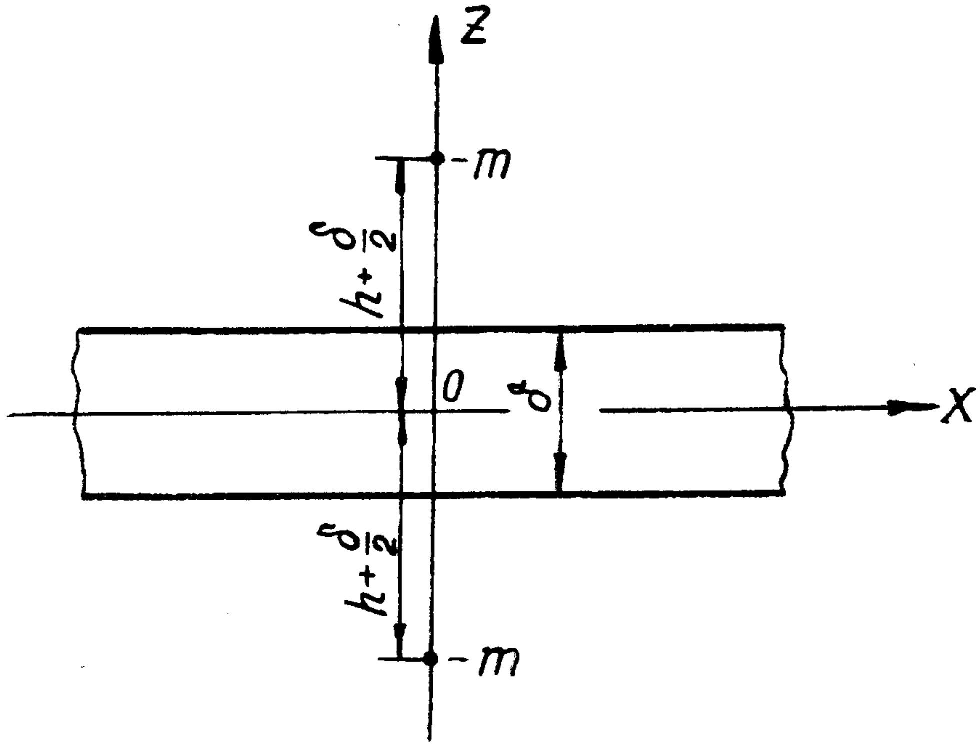

Рис. 1

На границах смежных сред имеют место условия:

$$u\left(x, \frac{\delta}{2}\right) = u^+\left(x, \frac{\delta}{2}\right) + u_0^+\left(x, \frac{\delta}{2}\right);$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial u\left(x, \frac{\delta}{2}\right)}{\partial z} = \frac{\partial u^+\left(x, \frac{\delta}{2}\right)}{\partial z} + \frac{\partial u_0^+\left(x, \frac{\delta}{2}\right)}{\partial z}, \tag{4}$$

$$u\left(x, -\frac{\delta}{2}\right) = u^-\left(x, -\frac{\delta}{2}\right) + u_0^-\left(x, -\frac{\delta}{2}\right);$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial u\left(x, \frac{\delta}{2}\right)}{\partial z} = \frac{\partial u^-\left(x, -\frac{\delta}{2}\right)}{\partial z} + \frac{\partial u_0^-\left(x, -\frac{\delta}{2}\right)}{\partial z}. \tag{5}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде интегралов Фурье;

$$u^{+}(x, z) = \int_0^\infty [A^{+}(\alpha, z)\cos\alpha x + B^{+}(\alpha, z)\sin\alpha x]\, d\alpha, \qquad z > \frac{\delta}{2} \tag{6}$$

$$u(x, z) = \int_0^\infty [A(\alpha, z)\cos\alpha x + B(\alpha, z)\sin\alpha x]\, d\alpha, \qquad -\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2} \tag{7}$$

$$u^{-}(x, z) = \int_0^\infty [A^{-}(\alpha, z)\cos\alpha x + B^{-}(\alpha, z)\sin\alpha x]\, d\alpha. \qquad z < -\frac{\delta}{2}. \tag{8}$$

Подставляя интегралы в уравнения (1) — (3) и используя единственность представления интегралом Фурье (см. [4]) получаем уравнения:

$$\frac{d^2A^{+}}{dz^2} - \alpha^2 A^{+} = 0, \qquad \frac{d^2B^{+}}{dz^2} - \alpha^2 B^{+} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2A^{-}}{dz^2} - \alpha^2 A^{-} = 0, \qquad \frac{d^2B^{-}}{dz^2} - \alpha^2 B^{-} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d^2A}{dz^2} - \alpha^2 A - \alpha\omega B = 0, \qquad \frac{d^2B}{dz^2} - \alpha^2 B + \alpha\omega A = 0. \tag{11}$$

Частными решениями уравнений (9) и (10) являются выражения $\exp(+\alpha z)$ и $\exp(-\alpha z)$, но для верхней среды $z > \frac{\delta}{2}$ только второе дает ограниченное решение, а для нижней $z < -\frac{\delta}{2}$ — только первое, так что будем иметь:

$$A^{+}(\alpha, z) = c_1^{+}(\alpha)\, e^{-\alpha z}, \quad B^{+}(\alpha, z) = c_2^{+}(\alpha)\, e^{-\alpha z}, \tag{12}$$

$$A^{-}(\alpha, z) = c_1^{-}(\alpha)\, e^{\alpha z}, \quad B^{-}(\alpha, z) = c_2^{-}(\alpha)\, e^{\alpha z}. \tag{13}$$

Система (11) приводится к уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4A}{dz^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2A}{dz^2} + \alpha^2(\omega^2 + \alpha^2) A = 0. \tag{14}$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$A(\alpha, z) = c_1 e^{\kappa_1 z} + c_2 e^{\kappa_2 z} + c_3 e^{-\kappa_1 z} + c_4 e^{-\kappa_2 z}, \tag{15}$$

где

$$K_{1,2} = a \pm bi, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2\omega^2 + \alpha^4}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}, \quad b = \frac{\alpha\omega}{2a} \tag{16}$$

или

$$A(\alpha, z) = e^{\alpha z}(C_1\cos bz + C_2\sin bz) + e^{-\alpha z}(C_3\cos bz + C_4\sin bz), \tag{17}$$

если положим $c_1 + c_2 = C_1$, $c_3 + c_4 = C_3$, $i(c_1 - c_2) = C_2$, $i(c_4 - c_3) = C_4$

Из системы (11) имеем:

$$B(\alpha, z) = \frac{1}{\alpha\omega}\left(\frac{d^2A}{dz^2} - \alpha^2 A\right).$$

И, подставляя значение $A(\alpha, z)$, получим:

$$B(\alpha, z) = i(c_1 e^{\kappa_1 z} - c_2 e^{\kappa_2 z} + c_3 e^{-\kappa_1 z} - c_4 e^{-\kappa_2 z})$$

или

$$B(\alpha, z) = e^{az}(C_2 \cos bz - C_1 \sin bz) + e^{-az}(C_3 \sin bz - C_4 \cos bz). \quad (18)$$

Подчиняя решения (6) — (8) краевым условиям (4) — (5), получим систему восьми уравнений для неизвестных c_1^+, c_2^+, c_1, c_2, c_3, c_4, c_1^-, c_2^-

$$c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} = c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} = c_1^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$\left[\kappa_1 \left(c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) + \kappa_2 \left(c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right)\right] = -\mu\alpha c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$\left[\kappa_1 \left(c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) + \kappa_2 \left(c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right)\right] = \mu\alpha c_1^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$i\left(c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha h}, \quad (19)$$

$$i\left(c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = c_2^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha h},$$

$$i\kappa_1 \left(c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) - i\kappa_2 \left(c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = -\mu\alpha c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + m\mu e^{-\alpha h},$$

$$i\kappa_1 \left(c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) - i\kappa_2 \left(c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = \mu\alpha c_2^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} - m\mu e^{-\alpha h}.$$

Из этой системы следует, что $c_3 = c_1$, $c_4 = c_2$, $c_1^- = c_1^+$, $c_2^- = c_2^+$. Тогда и $C_3 = C_1$, а $C_4 = -C_2$. И из (17) и (18) будем иметь:

$$A(\alpha, z) = e^{az}(C_1 \cos bz + C_2 \sin bz) + e^{-az}(C_1 \cos bz - C_2 \sin bz),$$

или

$$A(\alpha, z) = 2C_1 \cos bz \operatorname{ch} az + 2C_2 \sin bz \operatorname{sh} az,$$

$$B(\alpha, z) = e^{az}(C_2 \cos bz - C_1 \sin bz) + e^{-az}(C_2 \cos bz + C_1 \sin bz)$$

или

$$B(\alpha, z) = 2C_2 \cos bz \operatorname{ch} az - 2C_1 \sin bz \operatorname{sh} az.$$

Теперь вместо системы (19) будем иметь систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными c_1^+, C_1, C_2, c_2^+.

$$2C_1 \cos\frac{b\delta}{2} \operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} + 2C_2 \sin\frac{b\delta}{2} \operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} = c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$2C_1\left(a\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} - b\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2}\right) +$$

$$+ 2C_2\left(a\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} + b\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2}\right) = -\alpha\mu c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}}, \quad (20)$$

$$-2C_1 \sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} + 2C_2\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} = c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha h},$$

$$-2C_1\left(a\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} + b\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2}\right) +$$

$$+ 2C_2\left(a\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} - b\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2}\right) = -\alpha\mu c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + m\mu e^{-\alpha h}.$$

Решая систему (20), получим:

$$c_1 = -\frac{m\mu p}{p^2+q^2}e^{-\alpha h}, \qquad c_2 = \frac{m\mu q}{p^2+q^2}e^{-\alpha h},$$

$$c_1^+ = -\frac{m\mu}{p^2+q^2}(a\sin b\delta + b\,\mathrm{sh}\,a\delta)\,e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)},$$

$$c_2^+ = \frac{m\mu}{p^2+q^2}\left[a\,\mathrm{sh}\,a\delta - b\sin b\delta + 2\alpha\mu\left(\sin^2\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{a\delta}{2} + \cos^2\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}^2\frac{a\delta}{2}\right)\right]e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)} - \frac{m}{\alpha}e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)},$$

где

$$\begin{aligned} p &= \alpha\mu\sin\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a\delta}{2} + a\sin\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}\frac{a\delta}{2} + b\cos\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a\delta}{2} \\ q &= \alpha\mu\cos\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}\frac{a\delta}{2} + a\cos\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a\delta}{2} - b\sin\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}\frac{a\delta}{2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, при найденных значениях C_1, C_2, c_1^+ и c_2^+ решение выразится в виде интегралов:

$$u^+(x, z) = \int_0^\infty [c_1^+(\alpha)\cos\alpha x + c_2^+(\alpha)\sin\alpha x]\,e^{-\alpha z}\,d\alpha$$

$$u^-(x, z) = \int_0^\infty [c_1^+(\alpha)\cos\alpha x + c_2^+(\alpha)\sin\alpha x]\,e^{\alpha z}\,d\alpha, \quad u^-(x, -z) = u^+(x, z),$$

$$u(x, z) = 2\int_0^\infty [(C_1(\alpha)\cos bz\,\mathrm{ch}\,az + C_2(\alpha)\sin bz\,\mathrm{sh}\,az)\cos\alpha x + (C_2(\alpha)\cos bz\,\mathrm{ch}\,az - C_1(\alpha)\sin bz\,\mathrm{sh}\,az)\sin\alpha x]\,d\alpha.$$

Замечаем, что поле симметрично относительно плоскости XOY.

§ 2. Пластинка движется в поле разноименных полюсов, расположенных, как в первом случае. Первичное поле будет иметь вид

$$u_0^+ = m\int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}-z\right|\alpha}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha; \quad u_0^- = -m\int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}+z\right|\alpha}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha.$$

Задача сводится к решению уравнений (1) — (3) с краевыми условиями (4) — (5).

Как и прежде, решение задачи ищем в виде интегралов Фурье, используя единственность представления этого решения интегралом Фурье. При этом получаем

$$c_3 = -c_1,\ c_4 = -c_2,\ c_1^- = -c_1^+,\ c_2^- = -c_2^+ \ \text{и}\ C_3 = -C_1,\ C_4 = -C_2.$$

В этом случае решение выразится в виде интегралов:

$$u^+(x, z) = \int_0^\infty [c_1^+(\alpha)\cos\alpha x + c_2^+(\alpha)\sin\alpha x]\,e^{-\alpha z}\,d\alpha,$$

$$u^-(x, z) = -\int_0^\infty [c_1^+(\alpha)\cos\alpha x + c_2^+(\alpha)\sin\alpha x]\,e^{+\alpha z}\,d\alpha,$$

$$u(x, z) = 2\int_0^\infty \{[C_1(\alpha)\cos bz\,\mathrm{sh}\,az + C_2(\alpha)\sin bz\,\mathrm{ch}\,az]\cos\alpha x + [C_2(\alpha)\cos bz\,\mathrm{sh}\,az - C_1(\alpha)\sin bz\,\mathrm{ch}\,az]\sin\alpha x\}\,d\alpha.$$

где

$$C_1(\alpha) = -\frac{m\mu p_1}{p_1^2+q_1^2}e^{-\alpha h};\quad C_2(\alpha) = \frac{m\mu q_1}{p_1^2+q_1^2}e^{-\alpha h};$$

$$c_1^+(\alpha) = \frac{m\mu}{p_1^2+q_1^2}(a\sin b\delta - b\,\mathrm{sh}\,a\delta)\,e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)},$$

$$c_2^+(\alpha) = \frac{m\mu}{p_1^2+q_1^2}\Big[a\,\mathrm{sh}\,a\delta + b\sin b\delta +$$

$$+2\alpha\mu\left(\sin^2\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}^2\frac{a\delta}{2}+\cos^2\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{a\delta}{2}\right)\Big]e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)} - \frac{m}{\alpha}e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)},$$

$$p_1 = \alpha\mu\sin\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{a\delta}{2} + a\sin\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a\delta}{2} + b\cos\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{a\delta}{2},$$

$$q_1 = \alpha\mu\cos\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a\delta}{2} + a\cos\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{a\delta}{2} - b\sin\frac{b\delta}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a\delta}{2}.$$

§ 3. Пластинка движется в поле четырех магнитных полюсов расположенных как показано на рис. 2.

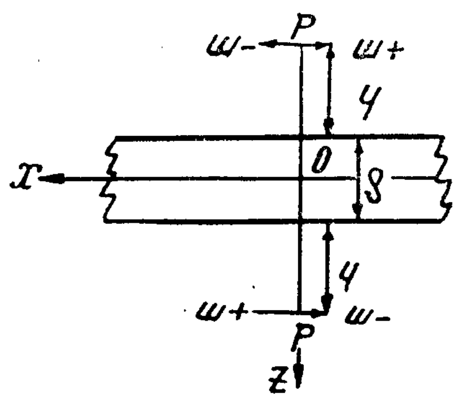

Рис. 2

Оставляя прежние обозначения, будем иметь:

$$u_0^+ = m\int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}-z\right|\alpha}\left[\sin(x+d)\alpha - \sin(x-d)\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha}$$

или

$$u_0^+ = 2m\int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}-z\right|\alpha}\cos x\alpha\sin d\alpha\,\frac{d\alpha}{\alpha};$$

$$u_0^- = 2m\int_0^\infty e^{-\left|h+\frac{\delta}{2}+z\right|\alpha}\cos x\alpha\sin\alpha d\,\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Как и в предыдущих случаях, задача сводится к решению уравнений (1) — (3). На границах смежных сред имеют место условия (4) — (5). Решение задачи будем искать в виде интегралов Фурье (6) — (8). Подчиняя решение (6) — (8) краевым условиям (4) — (5), получим систему восьми уравнений

$$c_1e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_2e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_4e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} = c_1^+e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + \frac{2m}{\alpha}\sin\alpha d\cdot e^{-\alpha h},$$

$$c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} + c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} = c_1^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + \frac{2m}{\alpha}\sin\alpha d\cdot e^{-\alpha h}, \qquad (22)$$

$$\kappa_1\left(c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) + \kappa_2\left(c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = -\alpha\mu c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + 2m\mu\sin\alpha d\cdot e^{-\alpha h}.$$

$$\kappa_1\left(c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) + \kappa_2\left(c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = \alpha\mu c_1^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} - 2m\mu\sin\alpha d\cdot e^{-\alpha h}.$$

$$i\left(c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}}.$$

$$i\left(c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = c_2^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}}.$$

$$i\kappa_1\left(c_1 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) - i\kappa_2\left(c_2 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = -\alpha\mu c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}}.$$

$$i\kappa_1\left(c_1 e^{-\frac{\kappa_1\delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1\delta}{2}}\right) - i\kappa_2\left(c_2 e^{-\frac{\kappa_2\delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2\delta}{2}}\right) = \alpha\mu c_2^- e^{-\frac{\alpha\delta}{2}}.$$

Отсюда

$$c_3 = c_1, \quad c_4 = c_2, \quad c_1^- = c_1^+, \quad c_2^- = c_2^+$$

и

$$C_3 = C_1, \quad C_4 = -C_2.$$

И вместо системы (21) будем иметь систему четырех уравнений с неизвестными $c_1^+(\alpha)$, $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, $c_2^+(\alpha)$:

$$2C_1\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} + 2C_2\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} = c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + \frac{2m}{\alpha}\sin\alpha d\cdot e^{-\alpha h},$$

$$2C_1\left(a\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2}\, b\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2}\right) + 2C_2\left(a\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} + b\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2}\right) =$$

$$= -\alpha\mu c_1^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}} + 2m\mu\sin\alpha d\cdot e^{-\alpha h}, \qquad (23)$$

$$-2C_1\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} + 2C_2\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} = c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$-2C_1\left(a\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2} + b\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2}\right) +$$

$$+2C_2\left(a\cos\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{a\delta}{2} - b\sin\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}\frac{a\delta}{2}\right) = -\alpha\mu c_2^+ e^{-\frac{\alpha\delta}{2}}.$$

Решая систему (23), получим

$$C_1(\alpha) = \frac{2m\mu\sin\alpha d}{p^2+q^2}\cdot q e^{-\alpha h}, \qquad C_2(\alpha) = \frac{2m\mu\sin\alpha d}{p^2+q^2}\cdot p e^{-\alpha h},$$

$$c_1^+(\alpha) = \frac{2m\mu\sin\alpha d}{p^2+q^2}\left[2\alpha\mu\left(\sin^2\frac{b\delta}{2}\operatorname{sh}^2\frac{a\delta}{2} + \cos^2\frac{b\delta}{2}\operatorname{ch}^2\frac{a\delta}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + a\operatorname{sh} a\delta - b\sin b\delta - \frac{p^2+q^2}{\alpha\mu}\right] e^{-\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\alpha},$$

$$c_2^+(\alpha) = \frac{2m\mu\sin\alpha d}{p^2+q^2}\left(a\sin b\delta + b\operatorname{sh} a\delta\right) e^{-\alpha\left(h-\frac{\delta}{2}\right)},$$

где q и p определяются по формулам (21). Тогда решение выразится в виде интегралов:

$$u^{+}(x, z) = \int_0^{\infty} [c_1^{+}(\alpha)\cos\alpha x + c_2^{+}(\alpha)\sin\alpha x]\, e^{-\alpha z}\, d\alpha,$$

$$u^{-}(x, z) = \int_0^{\infty} [c_1^{+}(\alpha)\cos\alpha x + c_2^{+}(\alpha)\sin\alpha x]\, e^{\alpha z}\, d\alpha,$$

$$u(x, z) = 2\int_0^{\infty} \{[C_1(\alpha)\cos bz \operatorname{ch} az + C_2(\alpha)\sin bz \operatorname{sh} az]\cos\alpha x +$$

$$+ [C_2(\alpha)\cos bz \operatorname{ch} az - C_1(\alpha)\sin bz \operatorname{sh} az]\sin\alpha x\}\, d\alpha.$$

Заметим, что мы можем решить задачу, как только нам задано первичное поле в виде интеграла Фурье. В частности, легко получить решение для случая, когда задано первичное поле линейных токов.

Для численного анализа задачи лучше всего, пользуясь зависимостью $\bar{B} = \overline{\mathrm{rot}}\bar{A}$, записать выражения для H_x и H_z

$$\mu H_x = -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \mu H_z = \frac{\partial u}{\partial x}$$

и затем уже вычислять значения их на ЭВМ в различных точках при различных значениях параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Федосенко. «Дефектоскопия», № 4, 1965, стр. 8.
2. W. Steidinger. Arch. für. El. XXII, 1953, 1929
3. А. Б. Сапожников. Основы электромагнитной дефектоскопии металлических тел. Диссертация, Томск. 1951. гл. 22.
4. Г. А. Бюлер и Т А. Луковская.— «Физика», № 2, 1968.