ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПЯТИПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА НЕВЫРОЖДЕННЫХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПЛОСКОСТИ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО

В. И. МАТВЕЕНКО

(Представлена кафедрой геометрии Томского университета)

В настоящей статье в трехмерном проективном пространстве рассматривается многообразие K (1,5) — пятипараметрическое семейство невырожденных коник, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Это семейство коник существует с произволом одной функции пяти аргументов. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] — [4].

Поместим вершины A_i $(i=1,2)$ координатного тетраэдра $\{A^\alpha\}$ $(\alpha=1, 2, 3, 4)$ в точки пересечения коники C с характеристикой ее плоскости, вершину A_3 — в точку пересечения касательных к конике в точках A_i, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. При этом исключается случай касания коники C с характеристикой ее плоскости. Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\beta = \omega_\beta^\alpha A_\alpha, \tag{1}$$

где ω_β^α формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_\beta^\alpha = [\omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha]. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $i, j, \kappa, t = 1, 2$; $i \neq j$; $\kappa \neq t$; $m, n, r = 1, 2, 3$; $m \neq n$; $m \neq r$; $n \neq r$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$. По i, j, β не суммировать! Уравнения коники C относительно этого репера имеют вид

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \quad p \neq 0. \tag{3}$$

Формы

$$\omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_n^4,\ \omega_3^i,\ \omega_\kappa^\kappa - 2\omega_3^3 - d\ln p$$

являются главными. Примем из них за базисные следующие формы:

$$\omega_i = \omega_i^j,\ \omega_\sigma = \omega_3^j - \frac{1}{p}\,\omega_i^3,\ \omega_5 = \omega_3^4.$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения $\sigma = i+2$, $\varkappa = j+2$. Остальные главные формы выразятся через базисные в виде

$$\begin{gathered} \omega_i^4 = 0,\ \omega_i^3 = C_i^{35}\omega_5,\ \omega_3^i = \omega_\varkappa + C_j^{35}\omega_5, \\ \omega_\kappa^\kappa - 2\omega_3^3 - d\ln p = a^\lambda\omega_\lambda. \end{gathered} \tag{4}$$

Характеристической коникой C_q^* [4] называется такая коника, которая проходит через точку A_3 и характеристические точки коники C при $\omega_h = \omega_g = \omega_l = \omega_5 = 0$. Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $g, h, l, q = 1, 2, 3, 4$; $g \neq h, l, q$; $h \neq l, q$; $l \neq q$. Однопараметрическое семейство коник $\omega_i = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_3 и A_i неподвижны. Однопараметрическое семейство коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_\sigma = \omega_5 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_1, A_2 и прямая A_3A_i неподвижны. При выборе в качестве базисных форм ω_λ исключаются случаи прохождения характеристических коник C_i^* через точки A_i и случаи полярной сопряженности точек A_i и A_3 относительно характеристических коник C_σ^*. Дифференцируя внешним образом уравнения (4), обычным путем получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего локального объекта $C_1\{p,\ a^\lambda,\ C_i^{35}\}$ [1]:

$$\delta \ln p = \pi_\kappa^\kappa - 2\pi_3^3, \quad \delta a^i = a^i(\pi_j^j - \pi_i^i),$$

$$\delta a^\sigma = a^\sigma(\pi_j^j - \pi_3^3), \quad \delta C_i^{35} = C_i^{35}(\pi_i^i + \pi_4^4 - 2\pi_3^3), \tag{5}$$

$$\delta a^5 = (\pi_\kappa^\kappa - 2\pi_3^3)(a^3C_1^{35} + a^4C_2^{35}) + a^3\pi_4^2 + a^4\pi_4^1 + a^5(\pi_3^3 - \pi_4^4) + 2\pi_4^3.$$

Из этих уравнений непосредственно заключаем, что величины p, a^q, C_i^{35} являются относительными инвариантами. Условие $C_i^{35} = 0$ характеризует семейства коник, для которых $M \equiv A_i$, где M — точка ребра возврата огибающего плоскости коник торса. Условие $a^i = 0$ характеризует семейства коник, для которых характеристическая коника C_i^* вырождается в сдвоенную прямую A_jA_3. Условие $a^\sigma = 0$ характеризует семейства коник, для которых характеристическая коника C_σ^* вырождается в пару прямых A_jA_3 и A_1A_2.

Величины

$$B_i = \frac{a^iC_i^{35}}{C_j^{35}}, \quad E_i = \frac{C_i^{35}(a^\sigma)^2}{pC_j^{35}}$$

являются абсолютными инвариантами. Геометрически они характеризуются через сложное отношение четырех точек следующим образом:

$$B_i = (A_iA_j;\ MS_{i3}), \quad E_i = -2(A_iA_j;\ MS_{\sigma 3}), \tag{6}$$

где S_{hn} — проекция из точки A_n на прямую A_mA_r одной из точек пересечения коник C и C_h^*. Из (6) вытекают следующие равенства:

$$(A_1A_3;\ S_{42}S_{32}) = (A_2A_3;\ S_{31}S_{41}),$$

$$(A_1A_3;\ S_{22}S_{12}) = (A_2A_3;\ S_{11}S_{21}),$$

$$(A_1A_2;\ S_{23}S_{13}) = (A_iA_3;\ S_{jj}S_{ij})^2,$$

$$(A_1A_2;\ MS_{33})(A_2A_1;\ MS_{43}) = (A_iA_3;\ S_{\varkappa j}S_{\sigma j})^2,$$

справедливые для общего семейства коник $K(1, 5)$.

Исключая из рассмотрения случаи обращения в нуль относительных инвариантов C_1^{35} и a^1, осуществим следующую фиксацию репера: $C_1^{35} = p = -a^1 = 1$. Если учесть еще условие эквипроективности $(A_1A_2A_3A_4) = 1$, то получим $\pi_3^\beta = 0$. Формы ω_3^β становятся главными и можно записать их разложение по базисным формам в виде $\omega_3^\beta = C_3^{\beta\lambda}\omega_\lambda$, где $C_\alpha^{\alpha\lambda} = 0$.

Поместим вершину A_4 репера $\{A_\alpha\}$ в точку пересечения плоскостей a_n, где a_i — касательные плоскости к неголономным поверхностям, которые описывают точки S_{1i}, а a_3 — касательная плоскость к неголономной поверхности, которую описывает точка A_3 при

$$\omega_1 = \omega_2 = C^\lambda \omega_\lambda = 0 \quad (C^\lambda = C_1^{1\lambda} - C_2^{2\lambda}). \tag{7}$$

При этом исключается случай принадлежности всех плоскостей a_n одному пучку плоскостей. Неголономная конгруэнция коник (7) геометрически характеризуется тем, что для нее точки A_i и S_{13} являются точками огибающих семейств прямых $(A_i A_3)$ и $(S_{13} A_3)$ соответственно. Деривационные формулы (1) полученного канонического репера имеют вид:

$$dA_i = C_i^{i\lambda} \omega_\lambda A_i + \omega_i A_j + C_i^{35} \omega_5 A_3, \quad dA_4 = C_4^{\alpha\lambda} \omega_\lambda A_\alpha,$$
$$dA_3 = \sum_\kappa (\omega_{t+2} + C_t^{35} \omega_5) A_\kappa + C_3^{3\lambda} \omega_\lambda A_3 + \omega_5 A_4,$$

где

$$C_\kappa^{\kappa 1} - 2C_3^{31} = -1, \quad C_2^{2\alpha} + 3C_3^{3\alpha} = \delta_1^\alpha C_2^{35},$$
$$C^4 [\sqrt{2}\, C_1^{13} C_2^{35} + C^3 (2C_2^{35} - 1 - \sqrt{2}\, C_3^{35}) + \sqrt{2}\, C_3^{33} (C^5 + 3C_1^{15})] -$$
$$- (C^5 - C^3)]\, C_3^{33} (C^4 + 3C_1^{14}) - C_3^{34} (C^3 + 3C_1^{13}) + \sqrt{2}\, C^3] = 0,$$
$$C^3 (\sqrt{2}\, C_2^{35} C_3^{34} - \sqrt{2}\, C_3^{35} - C_2^{35}) + \sqrt{2}\, C_3^{33} (C^5 - C^4 C_2^{35}) +$$
$$+ 3C_3^{33} C_1^{15} + C_2^{25} C_1^{13} + 3C_2^{35} (C_1^{13} - C_1^{14})] = 0,$$
$$C_2^{35} C^4 - C^5 + C^3 = 0 \quad (C^\lambda = C_1^{1\lambda} - C_2^{2\lambda}, \quad C^3 \neq 0, \quad C_2^{35} \neq 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТЛ, М. — Л., 1948.
3. В. С. Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3, (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 43—53.
4. В. С. Малаховский. Конгруэнция кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского ун-та. 168), 1963, 61—65.