ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В статье для ряда (1), являющегося составной частью функций Бесселя, получены приближения в виде произведения биномов. Эти приближения получены на основе цепных дробей и могут быть применены для вычисления функций Бесселя.

Оценка остаточного члена по модулю получена в комплексной области $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1. Степенной ряд

$$ {}_0F_1(\nu+1; z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{(\nu+1)_{\kappa}\,\kappa!}, \quad |z| < N, \ \nu \neq -1, -2, \ldots; \qquad (1) $$

где

$$ (a)_{\kappa} = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1, $$

преобразуется следующим образом:

$$ {}_0F_1(\nu+1; z) = e^{\ln {}_0F_1(\nu+1;\, z)} = \exp\left\{\int_0^z \frac{d\,[{}_0F_1(\nu+1; t)]}{{}_0F_1(\nu+1; t)}\right\}, $$

т. е.

$$ {}_0F_1(\nu+1; z) = \exp\left[\int_0^z \frac{{}_0F_1(\nu+2; t)\,dt}{(\nu+1)\,{}_0F_1(\nu+1; t)}\right]. \qquad (2) $$

Далее заменим отношение двух рядов под знаком интеграла в равенстве (2) известным разложением его в цепную дробь ([1], стр. 136) и представим степенной ряд (1) в виде следующего произведения:

$$ {}_0F_1(\nu+1; z) = \exp\left[\int_0^z \frac{P_{2n+1}(t)}{Q_{2n+1}(t)}\,dt\right] \exp\left[-\int_0^z R_{2n+1}(t)\,dt\right], \qquad (3) $$

где

$$ \rho_{2n+1}(z) = -\int_0^z R_{2n+1}(t)\,dt, \qquad (4) $$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = \nu + 1, \quad \alpha_{2m} = \frac{\nu + 2m}{t}, \quad \alpha_{2m+1} = \nu + 2m + 1, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa-1}(t)\, Q_{2\kappa+1}(t)}. \tag{6}$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (5) известны равенства и соотношение ([2] стр. 13, 14)

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \cdots + \frac{(\nu+2)_{2n}}{t^n} = \frac{(\nu+2)_{2n}}{t^n} p_{2n+1}(t), \tag{7}$$

$$Q_{2n+1}(t) = (n+1)(\nu+n+1) + \cdots + \frac{(\nu+1)_{2n+1}}{t^n} = \frac{(\nu+1)_{2n+1}}{t^n} q_{2n+1}(t). \tag{8}$$

$$\varphi_{2n+1}(z) = \left[1 + \frac{2z}{(\nu+2n+1)(\nu+2n-1)}\right] \varphi_{2n-1}(z) - \frac{z^2}{(\nu+2n-2)_3(\nu+2n-1)} \varphi_{2n-3}(z), \tag{9}$$

где $p_{2n+1}(z)$ и $q_{2n+1}(z) = \varphi_{2n+1}(z)$.

Числитель и знаменатель подходящей дроби (5) могут быть выражены явно через параметр ν и переменную z, а именно:

$$p_{2n+1}(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{C_{2n-m}^m z^m}{(\nu+2)_m(\nu+2n+2-m)_m}, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{10}$$

$$q_{2n+1}(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{C_{2n+1-m}^m z^m}{(\nu+1)_m(\nu+2n+2-m)_m}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства (11) для $n = 0,1$. Предположим, что равенство (11) справедливо для $q_{2n-3}(z)$ и $q_{2n-1}(z)$, тогда, подставляя значения этих знаменателей в правую часть соотношения (9), получим

$$q_{2n+1}(z) = \left[1 + \frac{2z}{(\nu+2n+1)(\nu+2n-1)}\right] \times$$
$$\times \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{2n-1-m}^m z^m}{(\nu+1)_m(\nu+2n-m)_m}\right] - \frac{z^2}{(\nu+2n-2)_3(\nu+2n-1)} \times$$
$$\times \left[\sum_{m=0}^{n-2} \frac{C_{2n-3-m}^m z^m}{(\nu+1)_m(\nu+2n-2-m)_m}\right] = 1 + \frac{2nz}{(\nu+1)(\nu+2n+1)} +$$
$$+ \sum_{m=2}^{n-1} \frac{C_{2n-1-m}^{m-2} z^m}{(\nu+1)_m(\nu+2n-m)_m(\nu+2n+1)} \times$$
$$\times \left\{\frac{2(2n-2m+1)(n-m)(\nu+2n+1)}{m(m-1)} + \right.$$

$$+\frac{(\nu+m)[(4n-3m+1)\nu+8n^2-8mn+4n+m^2-2m+1]}{(m-1)(\nu+2n)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{(n+1)z^n}{(\nu+1)_n(\nu+n+2)_n}=\sum_{m=0}^{n}=\frac{C_{2n+1-m}^m z^m}{(\nu+1)_m(\nu+2n+2-m)_m},$$

тем самым тождество (11) доказано, аналогично доказывается равенство (10).

2. При $\nu>-1$ и независимой переменной z в области $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$ все $\alpha_1,\dots,\alpha_{2m},\dots$ положительны и корни $Q_{2n+3}(z)$ отрицательны и разделяются корнями $Q_{2n+1}(z)$ ([2], стр. 14), поэтому и ввиду равенства (8), и ([5], стр. 23, (12))

$$|q_{2n+1}(z)|<|q_{2n+3}(z)|<\dots;\ n=0,1,\dots \tag{12}$$

Исходя из равенств (5), (8) и (12), нетрудно получить оценку для функционального ряда (6):

$$|R_{2n+1}(t)|<\frac{|t|^{2n+1}(\nu+2n+3)_2[(\nu+2n+3)_2-|t|^2]^{-1}}{(\nu+1)_{2n+1}(\nu+1)_{2n+2}|q_{2n+1}(t)|^2}, \tag{13}$$

где
$$|t|^2<(\nu+2n+3)_2,\ |\arg t|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Относительно модуля интеграла (4), ввиду неравенства (13), можно установить верхнюю границу (см. [6], (12))

$$|\rho_{2n+1}(z)|<\frac{|z|^{2n+2}(\nu+2n+3)_2[(\nu+2n+3)_2-|z|^2]^{-1}}{(\nu+1)_{2n+1}(\nu+1)_{2n+2}|q_{2n+1}(z)|^2},$$
$$|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Равенство (3) с учетом (7) и (8) можно представить в виде следующей суммы:

$${}_0F_1(\nu+1;\ z)=\exp\left[\int_0^z\frac{p_{2n+1}(t)\,dt}{(\nu+1)q_{2n+1}(t)}\right]+$$
$$+r_{2n+1}(z)=F_{2n+1}(z)+r_{2n+1}(z), \tag{15}$$

где
$$r_{2n+1}(z)=F_{2n+1}(z)\{\exp[\rho_{2n+1}(z)]-1\}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$|F_{2n+1}(z)|<|e^{\frac{z}{\nu+1}}|\exp|\rho_1(z)|,$$

поэтому

$$|r_{2n+1}(z)|<|e^{\frac{z}{\nu+1}}|\exp|\rho_1(z)|[\exp|\rho_{2n+1}(z)|-1]. \tag{16}$$

3. Теорема. Степенной ряд (1) представляется следующим произведением биномов:

$${}_0F_1(\nu+1;\ z)=e^{b_0z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{a_m}\right)^{b_m}+r_{2n+1}(z), \tag{17}$$

где

$$\begin{cases} \prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{a_m}\right)=q_{2n+1}(z), \qquad b_0=\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}, \\ b_m=\frac{a_m A_{2n+1}(-a_m)}{(\nu+1)^2(\nu+2)\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]}, \ n=1,2,\dots; \end{cases} \tag{18}$$

кроме того,

$$A_{2n+1}(z)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{C_{2n-1-m}^{m}\, z^m}{(\nu+3)_m(\nu+2n+2-m)}. \tag{19}$$

Многочлен $q_{2n+1}(z)$ определяется согласно равенству (11).

Верхняя граница остаточного члена по модулю устанавливается с помощью неравенств (16) и (14).

Доказательство. Применяя многочлен

$$M_{2n+1}(t)=\frac{1}{\nu+1}p_{2n+1}(t)-\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}q_{2n+1}(t) \tag{20}$$

и равенства (7), (8) и (18), преобразуем равенство (15):

$$ {}_0F_1(\nu+1;\ z)\exp\left[\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}\int_0^z dt+\int_0^z\frac{M_{2n+1}(t)\,dt}{q_{2n+1}(t)}\right]+$$

$$+r_{2n+1}(z)=\exp\left(b_0\int_0^z dt+\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{a_m}\int_0^z\frac{dt}{1+\frac{t}{a_m}}\right)+r_{2n+1}(z),$$

где

$$b_0=\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}, \qquad b_m=\frac{M^{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]}, \tag{21}$$

а также

$$ {}_0F_1(\nu+1;\ z)=e^{b_0 z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{a_m}\right)^{b_m}+r_{2n+1}(z), \tag{17}$$

к тому же на основании (15) и (17) верхняя граница для $|r_{2n+1}(z)|$ находится согласно неравенствам (16) и (14).

Ввиду первого равенства (18) $q_{2n+1}(-a_m)=0$, поэтому, применяя равенство (20), получим

$$b_m=\frac{M_{2n+1}(-a_m)+\left[\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}-\frac{1}{\nu+1}\right]q_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dz}]q_{2n+1}(-a_m)]}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\nu+1}[p_{2n+1}(-a_m)-q_{2n+1}(-a_m)]}{\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]}$$

и, применяя равенства (10) и (11), получим следующее равенство

$$\frac{1}{\nu+1}\left[p_{2n+1}(z)-q_{2n+1}(z)\right]=$$

$$=\frac{-z}{(\nu+1)^2(\nu+2)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{C_{2n-1-m}^{m}\,Z^m}{(\nu+3)_m(\nu+2n+2-m)_m}=\frac{-zA_{2n+1}(z)}{(\nu+1)^2(\nu+2)},$$

из которого следует равенство (19), а также последнее из равенств (18), тем самым теорема полностью доказана.

Коэффициенты b_m можно вычислять и по формуле (21), тогда согласно равенствам (10), (11) и (20) вычисляем

$$M_{2n+1}(z)=\sum_{m=0}^{n-1}\times$$

$$\times\frac{(n-m)[(2n+1)\nu+2n^2+5n+2-m]\,C_{2n-m}^{m}\,z^m}{(2n-2m+1)(n+1)(\nu+n+1)(\nu+1)_{m+1}(\nu+2n+2-m)_m}, \tag{22}$$

в частности,

$$M_1(z)=0,\ M_3(z)=\frac{\nu+3}{2(\nu+1)(\nu+2)},$$

$$M_5(z)=\frac{2(\nu+4)}{3(\nu+1)(\nu+3)}+\frac{(\nu+4)(5\nu+19)}{3(\nu+1)_5}z,$$

$$M_7(z)=\frac{3(\nu+5)}{4(\nu+1)(\nu+4)}+\frac{(\nu+3)(7\nu+34)}{2(\nu+1)_4(\nu+7)}+\frac{(\nu+5)(7\nu+33)z^2}{2(\nu+1)_7}.$$

4. Связь между функциями Бесселя и степенным рядом (1) выражается следующими формулами ([3], стр. 138 — 149), ([4], стр. 150):

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}{}_0F_1\left(\nu+1;-\frac{x^2}{4}\right), \tag{23}$$

$$I_\nu(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}{}_0F_1\left(\nu+1;\ \frac{x^2}{4}\right), \tag{24}$$

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[\cos\nu\pi\,J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)\right],\ \nu\neq 0,\ \pm 1,\dots; \tag{25}$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)\right],\ \nu\neq 0,\ \pm 1,\dots; \tag{26}$$

$$\mathrm{bei}_\nu(x)=Im\left[J_\nu(i\sqrt{i}\,x)\right], \tag{27}$$

$$\mathrm{ber}_\nu(x)=Re\left[J_\nu(i\sqrt{i}\,x)\right]. \tag{28}$$

Применяя формулу (17) в случае $n=1,2$, получим следующие приближенные формулы для степенного ряда (1):

$${}_0F_1(\nu+1;\ z)=e^{\frac{z}{2(\nu+2)}}\left[1+\frac{2z}{(\nu+1)(\nu+3)}\right]^{\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}}+r_3(z), \tag{29}$$

$${}_0F_1(\nu+1;\ z)=e^{\frac{z}{3(\nu+3)}}\left(1+\frac{2-\sqrt{\frac{\nu^2+6\nu+17}{\nu^2+6\nu+8}}}{\nu^2+6\nu+5}z\right)^{b_1}\times$$

$$\times\left(1+\frac{2+\sqrt{\frac{\nu^2+6\nu+17}{\nu^2+6\nu+8}}}{\nu^2+6\nu+5}z\right)^{b_2}+r_5(z), \tag{30}$$

где

$$b_{1,2}=\frac{(\nu+4)[(5\nu+19)\sqrt{\nu^2+6\nu+17}\pm 4(\nu+2)\sqrt{\nu^2+6\nu+8}]}{18(\nu+3)\sqrt{\nu^2+6\nu+17}}. \quad (31)$$

Для функций (27) и (28) получим приближения согласно формулам (23) и (29):

$$\operatorname{bei}_\nu(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left\{\left[1+\frac{x^4}{4(\nu+1)^2(\nu+3)^2}\right]^{\frac{(\nu+3)^2}{8(\nu+2)}}\times\right.$$

$$\times\sin\left[\frac{x^2}{8(\nu+2)}+\frac{3\nu\pi}{4}+\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2(\nu+1)(\nu+3)}\right]+$$

$$\left.+Im\left[r_3\left(i\frac{x^2}{4}\right)\right]\right\}, \quad (32)$$

$$\operatorname{ber}_\nu(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left\{\left[1+\frac{x^4}{4(\nu+1)^2(\nu+3)^2}\right]^{\frac{(\nu+3)^2}{b(\nu+2)}}\times\right.$$

$$\times\cos\left[\frac{x^2}{8(\nu+2)}+\frac{3\nu\pi}{4}+\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2(\nu+1)(\nu+3)}\right]\times$$

$$\left.+Re\left[r_3\left(i\frac{x^2}{4}\right)\right]\right\}, \quad (33)$$

где при $\nu=0$ и $x=2$ получим

$$\operatorname{bei}_0(2)\approx 0{,}97205\,(\Delta=0{,}00024),\ \operatorname{ber}_0(2)\approx 0{,}75332\,(\Delta=0{,}00058),$$

Δ — абсолютная погрешность.

Применяем формулы (24), (29) к функции (26) и переходим к пределу при $\nu\to 0$, в результате получим:

$$K_0(x)\approx e^{\frac{x^2}{16}}\left(1+\frac{x^2}{6}\right)^{\frac{9}{8}}\left[\psi(1)-\ln\frac{x}{2}+\frac{x^2}{32}\right]-$$

$$-\frac{3}{16}\ln\left(1+\frac{x^2}{6}\right)+\frac{6x^2}{4(6+x^2)}\Bigg], \quad \psi(1)=-0{,}5772157, \quad (34)$$

где

$$K_0(1)\approx 0{,}421049\,(\Delta=-0{,}000025),\ K_0(2)\approx 0{,}1186\,(\Delta=-0{,}0047).$$

Применим формулу (30) к функции (24), получим при $\nu=0$

$$I_0(x)=e^{\frac{x^2}{36}}\left(1+\frac{8-\sqrt{34}}{80}x^2\right)^{\frac{64+38\sqrt{34}}{27\sqrt{34}}}\left(1+\frac{8+\sqrt{34}}{80}x^2\right)^{\frac{64-38\sqrt{34}}{27\sqrt{34}}}+$$

$$+r_5\left(\frac{x^2}{4}\right). \quad (35)$$

Имеем таблицу

x	$I_0(x)$	(35)
4	11,3019	11,3045
8	427,6	443,86

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.

2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

3. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., ГИТТЛ, 1953.

4. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.

5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. «Изв. ТПИ», т. 131, стр. 21—25, 1965.

6. В. Е. Корнилов. Применение произведения биномов для вычисления функции Гаусса. Изв. ТПИ, т. 205, 1969.