

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В статье для ряда (1), являющегося составной частью функций Бесселя, получены приближения в виде произведения биномов. Эти приближения получены на основе цепных дробей и могут быть применены для вычисления функций Бесселя.

Оценка остаточного члена по модулю получена в комплексной области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Степенной ряд

$${}_0F_1(\nu + 1; z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{(\nu + 1)_{\kappa} \kappa!}, \quad |z| < N, \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad (1)$$

где

$$(a)_{\kappa} = \frac{\Gamma(a + \kappa)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1,$$

преобразуется следующим образом:

$${}_0F_1(\nu + 1; z) = e^{\ln {}_0F_1(\nu + 1; z)} = \exp \left\{ \int_0^z \frac{d[{}_0F_1(\nu + 1; t)]}{{}_0F_1(\nu + 1; t)} \right\},$$

т. е.

$${}_0F_1(\nu + 1; z) = \exp \left[\int_0^z \frac{{}_0F_1(\nu + 2; t) dt}{{}_0F_1(\nu + 1; t)} \right]. \quad (2)$$

Далее заменим отношение двух рядов под знаком интеграла в равенстве (2) известным разложением его в цепную дробь ([1], стр. 136) и представим степенной ряд (1) в виде следующего произведения:

$${}_0F_1(\nu + 1; z) = \exp \left[\int_0^z \frac{P_{2n+1}(t)}{Q_{2n+1}(t)} dt \right] \exp \left[- \int_0^z R_{2n+1}(t) dt \right], \quad (3)$$

где

$$\rho_{2n+1}(z) = - \int_0^z R_{2n+1}(t) dt, \quad (4)$$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = \nu + 1, \quad \alpha_{2m} = \frac{\nu + 2m}{t}, \quad \alpha_{2m+1} = \nu + 2m + 1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa-1}(t) Q_{2\kappa+1}(t)}. \quad (6)$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (5) известны равенства и соотношение ([2] стр. 13, 14)

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \dots + \frac{(\nu + 2)_{2n}}{t^n} = \frac{(\nu + 2)_{2n}}{t^n} p_{2n+1}(t), \quad (7)$$

$$Q_{2n+1}(t) = (n + 1)(\nu + n + 1) + \dots + \frac{(\nu + 1)_{2n+1}}{t^n} = \frac{(\nu + 1)_{2n+1}}{t^n} q_{2n+1}(t). \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1}(z) = & \left[1 + \frac{2z}{(\nu + 2n + 1)(\nu + 2n - 1)} \right] \varphi_{2n-1}(z) - \\ & - \frac{z^2}{(\nu + 2n - 2)_3(\nu + 2n - 1)} \varphi_{2n-3}(z), \end{aligned} \quad (9)$$

где $p_{2n+1}(z)$ и $q_{2n+1}(z) = \varphi_{2n+1}(z)$.

Числитель и знаменатель подходящей дроби (5) могут быть выражены явно через параметр ν и переменную z , а именно:

$$p_{2n+1}(z) = \sum_{m=0}^n \frac{C_{2n-m}^m z^m}{(\nu + 2)_m (\nu + 2n + 2 - m)_m}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (10)$$

$$q_{2n+1}(z) = \sum_{m=0}^n \frac{C_{2n+1-m}^m z^m}{(\nu + 1)_m (\nu + 2n + 2 - m)_m}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства (11) для $n = 0, 1$. Предположим, что равенство (11) справедливо для $q_{2n-3}(z)$ и $q_{2n-1}(z)$, тогда, подставляя значения этих знаменателей в правую часть соотношения (9), получим

$$\begin{aligned} q_{2n+1}(z) = & \left[1 + \frac{2z}{(\nu + 2n + 1)(\nu + 2n - 1)} \right] \times \\ & \times \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{2n-1-m}^m z^m}{(\nu + 1)_m (\nu + 2n - m)_m} \right] - \frac{z^2}{(\nu + 2n - 2)_3(\nu + 2n - 1)} \times \\ & \times \left[\sum_{m=0}^{n-2} \frac{C_{2n-3-m}^m z^m}{(\nu + 1)_m (\nu + 2n - 2 - m)_m} \right] = 1 + \frac{2nz}{(\nu + 1)(\nu + 2n + 1)} + \\ & + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{C_{2n-1-m}^{m-2} z^m}{(\nu + 1)_m (\nu + 2n - m)_m (\nu + 2n + 1)} \times \\ & \times \left\{ \frac{2(2n - 2m + 1)(n - m)(\nu + 2n + 1)}{m(m - 1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\nu + m)[(4n - 3m + 1)\nu + 8n^2 - 8mn + 4n + m^2 - 2m + 1]}{(m - 1)(\nu + 2n)} \Big\} +$$

$$+ \frac{(n + 1)z^n}{(\nu + 1)_n(\nu + n + 2)_n} = \sum_{m=0}^n \frac{C_{2n+1-m}^m z^m}{(\nu + 1)_m(\nu + 2n + 2 - m)_m},$$

тем самым тождество (11) доказано, аналогично доказывается равенство (10).

2. При $\nu > -1$ и независимой переменной z в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ все $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}, \dots$ положительны и корни $Q_{2n+3}(z)$ отрицательны и разделяются корнями $Q_{2n+1}(z)$ ([2], стр. 14), поэтому и ввиду равенства (8), и ([5], стр. 23, (12))

$$|q_{2n+1}(z)| < |q_{2n+3}(z)| < \dots; \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Исходя из равенств (5), (8) и (12), нетрудно получить оценку для функционального ряда (6):

$$|R_{2n+1}(t)| < \frac{|t|^{2n+1}(\nu + 2n + 3)_2 [(\nu + 2n + 3)_2 - |t|^2]^{-1}}{(\nu + 1)_{2n+1}(\nu + 1)_{2n+2} |q_{2n+1}(t)|^2}, \quad (13)$$

где $|t|^2 < (\nu + 2n + 3)_2, \quad |\arg t| \leq \frac{\pi}{2}.$

Относительно модуля интеграла (4), ввиду неравенства (13), можно установить верхнюю границу (см. [6], (12))

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{|z|^{2n+2}(\nu + 2n + 3)_2 [(\nu + 2n + 3)_2 - |z|^2]^{-1}}{(\nu + 1)_{2n+1}(\nu + 1)_{2n+2} |q_{2n+1}(z)|^2},$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

Равенство (3) с учетом (7) и (8) можно представить в виде следующей суммы:

$${}_0F_1(\nu + 1; z) = \exp \left[\int_0^z \frac{\rho_{2n+1}(t) dt}{(\nu + 1)q_{2n+1}(t)} \right] +$$

$$+ r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) + r_{2n+1}(z), \quad (15)$$

где $r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) \{ \exp[\rho_{2n+1}(z)] - 1 \}.$

Нетрудно вычислить, что

$$|F_{2n+1}(z)| < |e^{\frac{z}{\nu+1}}| \exp|\rho_1(z)|,$$

поэтому

$$|r_{2n+1}(z)| < |e^{\frac{z}{\nu+1}}| \exp|\rho_1(z)| [\exp|\rho_{2n+1}(z)| - 1]. \quad (16)$$

3. Теорема. Степенной ряд (1) представляется следующим произведением биномов:

$${}_0F_1(\nu + 1; z) = e^{b_0 z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m} \right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m}\right) = q_{2n+1}(z), & b_0 = \frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}, \\ b_m = \frac{a_m A_{2n+1}(-a_m)}{(\nu+1)^2(\nu+2) \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]}, & n = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (18)$$

кроме того,

$$A_{2n+1}(z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{2n-1-m}^m z^m}{(\nu+3)_m (\nu+2n+2-m)}. \quad (19)$$

Многочлен $q_{2n+1}(z)$ определяется согласно равенству (11).

Верхняя граница остаточного члена по модулю устанавливается с помощью неравенств (16) и (14).

Доказательство. Применяя многочлен

$$M_{2n+1}(t) = \frac{1}{\nu+1} p_{2n+1}(t) - \frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)} q_{2n+1}(t) \quad (20)$$

и равенства (7), (8) и (18), преобразуем равенство (15):

$$\begin{aligned} {}_0F_1(\nu+1; z) \exp \left[\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)} \int_0^z dt + \int_0^z \frac{M_{2n+1}(t) dt}{q_{2n+1}(t)} \right] + \\ + r_{2n+1}(z) = \exp \left(b_0 \int_0^z dt + \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{a_m} \int_0^z \frac{dt}{1 + \frac{t}{a_m}} \right) + r_{2n+1}(z), \end{aligned}$$

где

$$b_0 = \frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)}, \quad b_m = \frac{M_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]}, \quad (21)$$

а также

$${}_0F_1(\nu+1; z) = e^{b_0 z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \quad (17)$$

к тому же на основании (15) и (17) верхняя граница для $|r_{2n+1}(z)|$ находится согласно неравенствам (16) и (14).

Ввиду первого равенства (18) $q_{2n+1}(-a_m) = 0$, поэтому, применяя равенство (20), получим

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{M_{2n+1}(-a_m) + \left[\frac{1}{(n+1)(\nu+n+1)} - \frac{1}{\nu+1} \right] q_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]} = \\ &= \frac{\frac{1}{\nu+1} [p_{2n+1}(-a_m) - q_{2n+1}(-a_m)]}{\frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]} \end{aligned}$$

и, применяя равенства (10) и (11), получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu+1} [p_{2n+1}(z) - q_{2n+1}(z)] = \\ & = \frac{-z}{(\nu+1)^2(\nu+2)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{2n-1-m}^m Z^m}{(\nu+3)_m (\nu+2n+2-m)_m} = \frac{-z A_{2n+1}(z)}{(\nu+1)^2(\nu+2)}, \end{aligned}$$

из которого следует равенство (19), а также последнее из равенств (18), тем самым теорема полностью доказана.

Коэффициенты b_m можно вычислять и по формуле (21), тогда согласно равенствам (10), (11) и (20) вычисляем

$$\begin{aligned} M_{2n+1}(z) &= \sum_{m=0}^{n-1} \times \\ & \times \frac{(n-m)[(2n+1)\nu+2n^2+5n+2-m] C_{2n-m}^m z^m}{(2n-2m+1)(n+1)(\nu+n+1)(\nu+1)_{m+1}(\nu+2n+2-m)_m}, \end{aligned} \quad (22)$$

в частности,

$$\begin{aligned} M_1(z) &= 0, \quad M_3(z) = \frac{\nu+3}{2(\nu+1)(\nu+2)}, \\ M_5(z) &= \frac{2(\nu+4)}{3(\nu+1)(\nu+3)} + \frac{(\nu+4)(5\nu+19)}{3(\nu+1)_5} z, \\ M_7(z) &= \frac{3(\nu+5)}{4(\nu+1)(\nu+4)} + \frac{(\nu+3)(7\nu+34)}{2(\nu+1)_4(\nu+7)} + \frac{(\nu+5)(7\nu+33)z^2}{2(\nu+1)_7}. \end{aligned}$$

4. Связь между функциями Бесселя и степенным рядом (1) выражается следующими формулами ([3], стр. 138–149), ([4], стр. 150):

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{x^2}{4}\right), \quad (23)$$

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0F_1(\nu+1; \frac{x^2}{4}), \quad (24)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \neq 0, \pm 1, \dots; \quad (25)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)], \quad \nu \neq 0, \pm 1, \dots; \quad (26)$$

$$\text{bei}_\nu(x) = \text{Im} [J_\nu(i\sqrt{x})], \quad (27)$$

$$\text{ber}_\nu(x) = \text{Re} [J_\nu(i\sqrt{x})]. \quad (28)$$

Применяя формулу (17) в случае $n=1, 2$, получим следующие приближенные формулы для степенного ряда (1):

$${}_0F_1(\nu+1; z) = e^{\frac{z}{2(\nu+2)}} \left[1 + \frac{2z}{(\nu+1)(\nu+3)} \right]^{\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}} + r_3(z), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} {}_0F_1(\nu+1; z) &= e^{\frac{z}{3(\nu+3)}} \left(1 + \frac{2 - \sqrt{\frac{\nu^2+6\nu+17}{\nu^2+6\nu+8}}}{\nu^2+6\nu+5} z \right)^{b_1} \times \\ & \times \left(1 + \frac{2 + \sqrt{\frac{\nu^2+6\nu+17}{\nu^2+6\nu+8}}}{\nu^2+6\nu+5} z \right)^{b_2} + r_5(z), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$b_{1,2} = \frac{(\nu + 4)[(5\nu + 19)\sqrt{\nu^2 + 6\nu + 17} \pm 4(\nu + 2)\sqrt{\nu^2 + 6\nu + 8}]}{18(\nu + 3)\sqrt{\nu^2 + 6\nu + 17}}. \quad (31)$$

Для функций (27) и (28) получим приближения согласно формулам (23) и (29):

$$\begin{aligned} \text{bei}_\nu(x) = & \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ \left[1 + \frac{x^4}{4(\nu + 1)^2(\nu + 3)^2} \right]^{\frac{(\nu + 3)^2}{8(\nu + 2)}} \times \right. \\ & \times \sin \left[\frac{x^2}{8(\nu + 2)} + \frac{3\nu\pi}{4} + \frac{(\nu + 3)^2}{4(\nu + 2)} \arctg \frac{x^2}{2(\nu + 1)(\nu + 3)} \right] + \\ & \left. + \text{Im} \left[r_3 \left(i \frac{x^2}{4} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{ber}_\nu(x) = & \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ \left[1 + \frac{x^4}{4(\nu + 1)^2(\nu + 3)^2} \right]^{\frac{(\nu + 3)^2}{8(\nu + 2)}} \times \right. \\ & \times \cos \left[\frac{x^2}{8(\nu + 2)} + \frac{3\nu\pi}{4} + \frac{(\nu + 3)^2}{4(\nu + 2)} \arctg \frac{x^2}{2(\nu + 1)(\nu + 3)} \right] \times \\ & \left. + \text{Re} \left[r_3 \left(i \frac{x^2}{4} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где при $\nu = 0$ и $x = 2$ получим

$$\text{bei}_0(2) \approx 0,97205 (\Delta = 0,00024), \quad \text{ber}_0(2) \approx 0,75332 (\Delta = 0,00058),$$

Δ — абсолютная погрешность.

Применяем формулы (24), (29) к функции (26) и переходим к пределу при $\nu \rightarrow 0$, в результате получим:

$$\begin{aligned} K_0(x) \approx & e^{\frac{x^2}{16}} \left(1 + \frac{x^2}{6} \right)^{\frac{9}{8}} \left[\psi(1) - \ln \frac{x}{2} + \frac{x^2}{32} \right] - \\ & - \frac{3}{16} \ln \left(1 + \frac{x^2}{6} \right) + \frac{6x^2}{4(6 + x^2)}, \quad \psi(1) = -0,5772157, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$K_0(1) \approx 0,421049 (\Delta = -0,000025), \quad K_0(2) \approx 0,1186 (\Delta = -0,0047).$$

Применим формулу (30) к функции (24), получим при $\nu = 0$

$$\begin{aligned} I_0(x) = & e^{\frac{x^2}{36}} \left(1 + \frac{8 - \sqrt{34}}{80} x^2 \right)^{\frac{64 + 38\sqrt{34}}{27\sqrt{34}}} \left(1 + \frac{8 + \sqrt{34}}{80} x^2 \right)^{\frac{64 - 38\sqrt{34}}{27\sqrt{34}}} + \\ & + r_5 \left(\frac{x^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Имеем таблицу

| x | $I_0(x)$ | (35) |
|-----|----------|---------|
| 4 | 11,3019 | 11,3045 |
| 8 | 427,6 | 443,86 |

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
 2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
 3. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., ГИТТЛ, 1953.
 4. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
 5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биноминых дифференциалов. «Изв. ТПИ», т. 131, стр. 21—25, 1965.
 6. В. Е. Корнилов. Применение произведения биномов для вычисления функции Гаусса. Изв. ТПИ, т. 205, 1969.
-