ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ КУММЕРА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В статье разбирается вопрос о получении приближений функции Куммера в виде произведения биномов. Эти приближения получены на базе цепных дробей и могут быть применены для вычисления этой функции.

Функция Куммера содержит параметры α и γ, которые в этой статье изучены при положительных значениях $2\alpha > \gamma > 0$.

1. Вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa\, \kappa!} x^\kappa,\ |x| < N,$$

$$\gamma \neq 0,\ -1, \ldots;\ (a)_\kappa = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)},\qquad (a)_0 = 1 \tag{1}$$

может быть представлена как частное двух функций следующим путем:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = e^{\ln \Phi(\alpha;\ \gamma;\ x)} = \exp\left\{\int_0^x \frac{d\,[\Phi(\alpha;\ \gamma;\ t)]}{\Phi(\alpha;\ \gamma;\ t)}\right\},$$

т. е.

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = \exp\left[\alpha \int_0^x \frac{\Phi(\alpha+1;\ \gamma+1;\ t)}{\gamma\Phi(\alpha;\ \gamma;\ t)}\,dt\right]. \tag{2}$$

Далее заменим отношение двух рядов под знаком интеграла (2) известным разложением его в цепную дробь ([1], стр. 134) и представим функцию (1) в виде следующего произведения:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = \exp\left[\alpha \int_0^x \frac{P_{2n+1}(t)}{Q_{2n+1}(t)}\,dt\right] \exp\left[-\alpha \int_0^x R_{2n+1}(t)\,dt\right], \tag{3}$$

где

$$\rho_{2n+1}(x) = -\alpha \int_0^x R_{2n+1}(t)\,dt, \tag{4}$$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} \quad \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = \gamma,\ \alpha_{2m} = (-1)^m \frac{(\gamma + 2m - 1)(\alpha + 1)_{m-1}}{(\gamma - \alpha)_m} \cdot \frac{1}{t},$$

$$\alpha_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\gamma + 2m)(\gamma - \alpha)_m}{(\alpha + 1)_m}, \qquad m = 1, 2, \ldots; \tag{5}$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa-1}(t)\, Q_{2\kappa+1}(t)} \text{ ([2], стр. 34).} \tag{6}$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (5) известны равенства и соотношение ([2], стр. 13, 14)

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \ldots + \frac{(\gamma+1)_{2n}}{(\alpha+1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} = \frac{(\gamma+1)_{2n}}{(\alpha+1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} p_{2n+1}(t), \tag{7}$$

$$Q_{2n+1}(t) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_{2m+1} + \ldots + \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha+1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} = \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha+1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} q_{2n+1}(t), \tag{8}$$

где

$$D_n = \sum_{m=0}^{n} \alpha_{2m+1} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(\gamma + 2n)(\gamma - \alpha)_m}{(\alpha + 1)_m}. \tag{9}$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = \left[1 + \frac{2\alpha - \gamma}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n)} x\right] \varphi_{2n-1}(x) +$$

$$+ \frac{(\alpha + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n - 3)_3} x^2 \varphi_{2n-3}(x), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{10}$$

где $\qquad p_{2n+1}(x)$ и $q_{2n+1}(x) = \varphi_{2n+1}(x)$.

Ввиду того, что правая часть равенства (9) может быть представлена разностью двух обобщенных гипергеометрических рядов, и, применяя следующую формулу ([3], стр. 191) в частном случае ($c = 1$):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} = \gamma\, {}_3F_2\left(1 + \frac{\gamma}{2}, \quad \gamma - \alpha, \ 1; \ \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha + 1; \ -1\right) = \alpha, \tag{11}$$

получим

$$D_n = \sum_{m=0}^{n} \alpha_{2m+1} = \frac{(\alpha)_{n+1} + (-1)^n (\gamma - \alpha)_{n+1}}{(\alpha + 1)_n}. \tag{12}$$

2. При следующих значениях параметров $2\alpha > \gamma > 0$ и независимой переменной $x > 0$ имеем:

1) для $\alpha = \gamma + \kappa + \varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)$ все $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\kappa+3}$ в равенствах (5) $(m = 1, \ldots, \kappa + 1)$ положительны и корни $Q_{2\kappa+3}(x)$ отрицательные ([2], стр. 14) и разделяются корнями $Q_{2\kappa+1}(x)$, поэтому и ввиду равенства (8)

$$q_1(x) < q_3(x) < \ldots < q_{2n+3}(x); \tag{13}$$

2) для $\frac{\gamma}{2} < \alpha < \gamma + 1$ и для $\alpha = \gamma + \kappa + \varepsilon\ (m = \kappa + 2, \ldots)$, ввиду соотношений (10) и неравенств (13), получим:

$$q_{2n+1}(x) < q_{2n+3}(x) < \ldots; \ n = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Исходя из равенств (5), (8) и (14), нетрудно получить оценку для функционального ряда (6):

$$|R_{2n+1}(t)| < \frac{|(\gamma-\alpha)_{n+1}|(\alpha+1)_n t^{2n+1}}{(\gamma)_{2n+1}(\gamma)_{2n+2}[q_{2n+1}(t)]^2}, \quad t>0 \tag{15}$$

Относительно модуля интеграла (4), ввиду неравенств (15), можно установить верхнюю границу:

$$|\rho_{2n+1}(x)| < \frac{x^{2n+2}|(\gamma-\alpha)_{n+1}|(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1}(\gamma)_{2n+2}[q_{2n+1}(x)]^2}, \qquad x>0. \tag{16}$$

Равенство (3) с учетом (7) и (8) можно представить в виде следующей суммы:

$$\Phi(\alpha;\gamma;x)\exp\left[\frac{\alpha}{\gamma}\int_0^x \frac{p_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)}\,dt\right] + r_{2n+1}(x) =$$

$$= \Phi_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(x), \tag{17}$$

где

$$|r_{2n+1}(x)| < e^{\frac{\alpha}{\gamma}x}\exp|\rho_1(x)|[\exp|\rho_{2n+1}(x)|-1]. \tag{18}$$

3. Теорема. Вырожденная гипергеометрическая функция (1) представляется следующим произведением биномов:

$$\Phi(\alpha;\gamma;x) = e^{b_0 x}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{x}{a_m}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(x), \tag{19}$$

где

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{x}{a_m}\right) = q_{2n+1}(x), \qquad b_0 = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{n+1}+(-1)^n(\gamma-\alpha)_{n+1}},$$

$$b_m = \frac{\alpha(\alpha-\gamma)a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2(\gamma+1)\frac{d}{dx}[q_{2n+1}(-a_m)]}; \qquad n=1,2,\ldots \tag{20}$$

Многочлены $A_{2n+1}(x)$, $q_{2n+1}(x)$ и $p_{2n+1}(x)$ следующие:

$$A_1(x)=0,\ A_3(x)=q_1(x)=p_1(x)=1,$$

$$q_3(x) = 1+\frac{2\alpha-\gamma}{\gamma(\gamma+2)}x, \qquad p_3(x) = 1+\frac{(\alpha+1)}{(\gamma+1)_2}x; \tag{21}$$

они для $n=2,3,\ldots$ определяются последовательно с помощью соотношения (10). Оценка остаточного члена $|r_{2n+1}(x)|$ устанавливается с помощью неравенств (18) и (16).

Доказательство. Ввиду следующего равенства

$$(\gamma-\alpha)xA_{2n+1}(x) = (\gamma)_2[p_{2n+1}(x)-q_{2n+1}(x)], \ n=1,2,\ldots; \tag{22}$$

а также

$$M_{2n+1}(x) = \frac{\alpha}{\gamma}p_{2n+1}(x) - \frac{\alpha}{D_n}q_{2n+1}(x), \tag{23}$$

многочлены $A_{2n+1}(x)$, $M_{2n+1}(x)$ наряду с $q_{2n+1}(x)$ и $p_{2n+1}(x)$ удовлетворяют соотношению (10).

Применяя равенства (7) — (9), (20) и (23), преобразуем равенство (17):

$$\Phi(\alpha;\gamma;x)\exp\left[\frac{\alpha}{D_n}\int_0^x dt+\int_0^x\frac{M_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)}\,dt\right]+r_{2n+1}(x)=$$

$$=\exp\left[b_0\int_0^x dt+\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{a_m}\int_0^x\frac{dt}{1+\frac{t}{a_m}}\right]+r_{2n+1}(x),$$

где $b_0=\frac{\alpha}{D_n}$ и ввиду равенства (12) $b_0=\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{n+1}+(-1)^n(\gamma-\alpha)_{n+1}}$, а также

$$\Phi(\alpha;\gamma;x)=e^{b_0 x}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{x}{a_m}\right)^{b_m}+r_{2n+1}(x),\ b_m=$$

$$=\frac{M_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dx}\left[q_{2n+1}(-a_m)\right]},$$

к тому же, на основании (19) и (17) оценка $|r_{2n+1}(x)|$ находится согласно неравенствам (18) и (16).

Ввиду первого равенства (20) $q_{2n+1}(-a_m)=0$, поэтому, применяя равенство (23), получим

$$b_m=\frac{M_{2n+1}(-a_m)+\left(\frac{\alpha}{D_n}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)q_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dx}\left[q_{2n+1}(-a_m)\right]}=$$

$$=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}\left[p_{2n+1}(-a_m)-q_{2n+1}(-a_m)\right]}{\frac{d}{dx}\left[q_{2n+1}(-a_m)\right]}$$

и на основании равенства (22)

$$b_m=\frac{\alpha(\alpha-\gamma)\,a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2(\gamma+1)\frac{d}{dx}\left[q_{2n+1}(-a_m)\right]},$$

тем самым теорема полностью доказана.

4. В случае комплексных корней многочлена $q_{2n+1}(x)$ эти корни — a_m и коэффициенты b_m соответственно будут попарно сопряженные и каждые такие два множителя могут быть преобразованы к элементарным функциям с вещественными коэффициентами. Например, после элементарных преобразований получим $(i=\sqrt{-1})$

$$\left(1+\frac{x}{a+bi}\right)^{\sigma+\tau i}\left(1+\frac{x}{a-bi}\right)^{\sigma-\tau i}=$$

$$=\left[\frac{b^2x^2}{(a^2+b^2)^2}+\left(\frac{ax}{a^2+b^2}+1\right)^2\right]^{\sigma}e^{2\tau\,\mathrm{arctg}\,\frac{bx}{ax+a^2+b^2}}. \qquad (24)$$

Применим формулу (19) в случае $n = 1$, получим:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = e^{\frac{\alpha(\alpha+1)x}{(2\alpha-\gamma)(\gamma+1)}}\left(1 + \frac{2\alpha-\gamma}{\gamma^2+2\gamma}\,x\right)^{\frac{\alpha(\alpha-\gamma)(\gamma+2)^2}{(2\alpha-\gamma)^2(\gamma+1)}} + r_3(x). \qquad (25)$$

Из равенства (25) можно получить как точные равенства

$$\Phi(\gamma+1;\ \gamma;\ x) = e^x\left(1 + \frac{1}{\gamma}\,x\right); \qquad \Phi(-1;\ \gamma;\ x) = 1 - \frac{x}{\gamma};$$

так и приближенные равенства для интеграла вероятностей и интегралов Френеля ([3], стр. 254):

$$\mathrm{Erf}(x) \equiv \int\limits_0^x e^{-t^2}dt = x\Phi\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -x^2\right) =$$

$$= xe^{0,6\,x^2}\left(1 + \frac{2}{21}\,x^2\right)^{-9,8} + xr_3(-x^2); \qquad (26)$$

$$C(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -ix\right) +\right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ ix\right)\right] \approx \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(1 + \frac{4x^2}{441}\right)^{-4,9} \times$$

$$\times \cos\left(9,8\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{21} - 0,6\,x\right), \qquad (27)$$

$$S(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x t^{-\frac{1}{2}}\sin t\,dt \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(1 + \frac{4x^2}{441}\right)^{-4,9}\sin\left(9,8\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{21} - 0,6\,x\right), \qquad (28)$$

где для $x = 1$ получим:

$$C(1) \approx 0,72203\ (\Delta = -0,00033), \quad S(1) \approx 0,24774\ (\Delta = 0,00014),$$

здесь Δ — абсолютная погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хованский. Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
3. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.