

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГАУССА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В статье излагается вопрос о получении приближений функции Гаусса в виде произведения биномов. Эти приближения получены на основе теории цепных дробей и могут быть применены для вычисления изучаемой функции.

Функция Гаусса содержит параметры α , β и γ , которые в этой статье представлены при изменении в следующих интервалах $\gamma > \alpha > -1$, $\gamma > \beta > 0$, $\gamma \geq 2\beta - 1$; z — комплексное переменное.

1. Гипергеометрическая функция — функция Гаусса

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\kappa} (\beta)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa} \kappa!} (-z)^{\kappa},$$

$$\gamma \neq 0, -1, \dots; |\arg(1+z)| < \pi, \quad (1)$$

где

$$(a)_{\kappa} = a(a+1) \dots (a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1,$$

преобразуется следующим образом:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = e^{\ln F(\alpha, \beta; \gamma; -z)} = \\ = \exp \left\{ \int_0^z [F(\alpha, \beta; \gamma; -z)]^{-1} d[F(\alpha, \beta; \gamma; -z)] \right\},$$

т. е.

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = \exp \left[- \int_0^z \frac{\alpha \beta F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; -t)}{\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; -t)} dt \right]. \quad (2)$$

Далее к числителю подынтегральной функции (2) применим рекуррентное соотношение ([1], стр. 313)

$$\frac{\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; -t) = \frac{1}{1+t} F(\alpha, \beta; \gamma; -t) - \\ - \frac{\gamma-\beta}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+t} F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; -t) \quad (3)$$

и заменим отношение двух рядов известным разложением его в цепную дробь ([2], стр. 132), тогда после некоторых упрощений представим функцию (1) в виде следующего произведения:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{-\alpha} \exp \left[\alpha(\gamma - \beta) \int_0^z \frac{P_{2n+1}(t)}{Q_{2n+1}(t)} \cdot \frac{dt}{1+t} \right] \times \\ \times \exp \left[-\alpha(\gamma - \beta) \int_0^z R_{2n+1}(t) \frac{dt}{1+t} \right], \quad (4)$$

где

$$p_{2n+1}(z) = -\alpha(\gamma - \beta) \int_0^z R_{2n+1}(t) \frac{dt}{1+t}; \quad (5)$$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = \gamma, \quad \alpha_{2m} = \frac{(\gamma + 2m - 1)(\alpha + 1)_{m-1}(\gamma - \beta + 1)_{m-1}}{(\beta)_m(\gamma - \alpha)_m} \cdot \frac{1}{t},$$

$$\alpha_{2m+1} = \frac{(\gamma + 2m)(\beta)_m(\gamma - \alpha)_m}{(\alpha + 1)_m(\gamma - \beta + 1)_m}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad (6)$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa-1}(t) Q_{2\kappa+1}(t)}. \quad (7)$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (6) известны равенства и соотношение ([3], стр. 13, 14):

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \dots + \frac{(\gamma + 1)_{2n}}{(\alpha + 1)_n(\gamma - \beta + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} = \\ = \frac{(\gamma + 1)_{2n}}{(\alpha + 1)_n(\gamma - \beta + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} p_{2n+1}(t), \quad (8)$$

$$Q_{2n+1}(t) = \sum_{m=0}^n \alpha_{2m+1} + \dots + \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha + 1)_n(\gamma - \beta + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} = \\ = \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha + 1)_n(\gamma - \beta + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} q_{2n+1}(t). \quad (9)$$

$$Q_{2n+1}(z) = \left(\alpha_{2n} \alpha_{2n+1} + 1 + \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}} \right) Q_{2n-1}(z) - \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}} Q_{2n-3}(z). \quad (10)$$

2. Так как $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{t \alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1}} = \frac{1}{4}$, то, ввиду ([3], стр. 26), все корни многочлена $Q_{2n+1}(t)$ вещественные, расположены в интервале $(-\infty, -1)$, поэтому и ввиду равенства (9)

$$Q_{2n+1}(t) = \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha + 1)_n(\gamma - \beta + 1)_n} \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{a_m} \right), \\ a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1. \quad (11)$$

Отсюда нетрудно сделать вывод, что при изменении t вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки 0 и z :

1) в областях

$$\operatorname{Re}(t) \geq 0 \text{ и } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{t}\right) < -1: \left| \operatorname{Re}\left(\frac{1}{t}\right) \right| > 1 > \frac{1}{a_m},$$

минимум $\left| \frac{1}{t} + \frac{1}{a_m} \right|$ будет при $t = z$;

2) максимум частного $\frac{1}{|Q_{2\kappa-1}(t)|}$ в указанных областях изменения комплексного переменного t также будет при $t = z$. Поэтому можно получить следующее неравенство относительно модуля интеграла (5):

$$|\rho_{2n+1}(z)| < |\alpha|(\gamma - \beta) |R_{2n+1}(z)| \int_0^z \frac{|dt|}{|1+t|}. \quad (12)$$

При интегрировании вдоль радиуса точки z получим ([4], стр. 430):

$$1) \text{ если } \operatorname{Re}(z) \geq 0, \text{ то } \int_0^z \frac{|dt|}{|1+t|} < \int_0^{|z|} d|t| = |z|;$$

$$2) \text{ если } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < -1, \text{ то } |z| < 1 \text{ и}$$

$$\int_0^z \frac{|dt|}{|1+t|} \leq \int_0^{|z|} \frac{d|t|}{1-|t|} = |\ln(1-|z|)|.$$

Ввиду изложенного вводится функция

$$\tau(z) = \begin{cases} |z| & \text{для } \operatorname{Re}(z) \geq 0, \\ |\ln(1-|z|)| & \text{для } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < -1 \end{cases} \quad (13)$$

и упрощается неравенство (12)

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \tau(z) |\alpha|(\gamma - \beta) |R_{2n+1}(z)|. \quad (14)$$

3. Бесконечный функциональный ряд (7) оценивается по модулю аналогично, как это было сделано для цепной дроби (6) при $\beta = 1$ в статье ([5], стр. 24), а именно: ввиду (7), (9), (14) и $\gamma \geq 2\beta - 1$, после некоторых упрощений получим:

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\tau(z)}{2} \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{|(\alpha)_{\kappa}|(\beta)_{\kappa-1}(\gamma - \beta)_{\kappa}(\gamma - \alpha)_{\kappa}|z|^{2\kappa-1}}{[(\gamma)_{2\kappa-1}]^2 |q_{2n+1}(z)|^2 [\tau(z)]^{2\kappa-2n-1}}, \quad (15)$$

где

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 & \text{для } \operatorname{Re}(z) \geq 0, \\ |1+z| & \text{для } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < -1. \end{cases} \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что отношение последующего слагаемого к предыдущему в сумме (15) меньше $|4\sigma(z) \cdot z^{-1}|^{-2}$, а также

$$(\alpha + 1)_n (\beta)_n (\gamma - \beta + 1)_n (\gamma - \alpha + 1)_n [(\gamma + 1)_{2n}]^{-2} < 2^{-4n},$$

поэтому после упрощений окончательно получим следующую оценку по модулю для интеграла (5):

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\tau(z)\sigma(z)|\alpha z^{2n+1}|}{[4\sigma(z)]^2 - |z|^2} \cdot \frac{(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)}{2^{4n-3}\gamma|q_{2n+1}(z)|^2},$$

$$4\sigma(z) > |z|, \quad (17)$$

где $\tau(z)$ и $\sigma(z)$ принимают значения согласно равенствам (13) и (16).

Равенство (4) с учетом (8) и (9) можно записать в виде следующей суммы:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{-\alpha} \exp \left[\frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma} \int_0^z \frac{p_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)} \cdot \frac{dt}{1+t} \right] +$$

$$+ r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) + r_{2n+1}(z), \quad (18)$$

где

$$r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) \{ \exp[\rho_{2n+1}(z)] - 1 \}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$|F_{2n+1}(z)| < |(1+z)^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}| \exp|\rho_1(z)|,$$

поэтому

$$|r_{2n+1}(z)| < |(1+z)^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}| \exp|\rho_1(z)| \{ \exp|\rho_{2n+1}(z)| - 1 \}. \quad (19)$$

4. Теорема. Гипергеометрическая функция (1) представляется следующим произведением биномов:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{b_0} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m} \right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \quad (20)$$

где

$$\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m} \right) = q_{2n+1}(z), \quad b_0 = -\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1}q_{2n+1}(-1)},$$

$$b_m = \frac{\alpha\beta(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2(\gamma + 1)(1 - a_m) \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Многочлены $A_{2n+1}(z)$, $q_{2n+1}(z)$, $p_{2n+1}(z)$ следующие;

$$A_1(z) = 0; \quad A_3(z) = q_1(z) = p_1(z) = 1,$$

$$q_3(z) = 1 + \frac{(\alpha + \beta + 1)\gamma - 2\alpha\beta}{\gamma(\gamma + 2)}z, \quad p_3(z) = 1 + \frac{(\alpha + 1)(\gamma - \beta + 1)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}z; \quad (22)$$

они для $n = 2, 3, \dots$ определяются последовательно с помощью соотношения (25),

Верхняя граница $|r_{2n+1}(z)|$ в областях комплексного переменного $Re(z) \geq 0$ и $Re\left(\frac{1}{z}\right) < -1$, ограниченных $4\sigma(z) > |z|$, устанавливается неравенствами (19) и (17).

Доказательство. Если ввести равенство

$$\beta(\gamma - \alpha)zA_{2n+1}(z) = \gamma(\gamma + 1)[q_{2n+1}(z) - p_{2n+1}(z)], \quad n = 1, 2, \dots; \quad (23)$$

то, ввиду равенств (4), (6), (8) — (10), (22), многочлены $A_{2n+1}(z)$, $q_{2n+1}(z)$, $p_{2n+1}(z)$, а также

$$M_{2n+1}(z) = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma} p_{2n+1}(z) - \alpha q_{2n+1}(z) \quad (24)$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1}(z) = & \left[1 + \frac{(\alpha + \beta + 2n - 1)\gamma + 2n(n - 1) - 2\alpha\beta}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n)} z \right] \varphi_{2n-1}(z) - \\ & - \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)(\gamma - \beta + n - 1)}{(\gamma + 2n - 3)_3(\gamma + 2n - 2)} z^2 \varphi_{2n-3}(z). \end{aligned} \quad (25)$$

Равенство

$$M_{2n+1}(-1) = - \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1}} \quad (26)$$

легко доказывается методом математической индукции с помощью соотношения (25).

Применяя равенства (21), (24), (26), преобразуем равенство (18):

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = & \exp \left[\int_0^z \frac{M_{2n+1}(t) dt}{(1+t)q_{2n+1}(t)} \right] + r_{2n+1}(z) = \\ = & \exp \left[b_0 \int_0^z \frac{dt}{1+t} + \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{a_m} \int_0^z \frac{dt}{1 + \frac{t}{a_m}} \right] + r_{2n+1}(z), \end{aligned}$$

т. е.

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{b_0} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m} \right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \quad (20)$$

где ввиду равенства (26)

$$b_0 = - \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1} q_{2n+1}(-1)}, \quad b_m = \frac{M_{2n+1}(-a_m)}{(1-a_m) \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]},$$

к тому же, на основании (20) и (18) верхняя граница $|r_{2n+1}(z)|$ оценивается неравенствами (19) и (17).

Ввиду равенств (9) и (11) $q_{2n+1}(-a_m) = 0$, $m = 1, \dots, n$; поэтому, применяя равенство (24), получим

$$\begin{aligned} b_m = & \frac{M_{2n+1}(-a_m) + \frac{\alpha\beta}{\gamma} q_{2n+1}(-a_m)}{(1-a_m) \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]} = \\ = & \frac{\alpha(\gamma - \beta) [p_{2n+1}(-a_m) - q_{2n+1}(-a_m)]}{\gamma(1-a_m) \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]} \end{aligned}$$

и на основании равенства (23)

$$b_m = \frac{\alpha\beta(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2(\gamma + 1)(1 - a_m) \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]},$$

тем самым теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
 2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
 3. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
 4. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
 5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 21—25. 1965.
-