ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В этой статье эллиптические интегралы представлены в виде суммы арктангенсов.

Оценка остаточного члена получена для $Re(\kappa^2 z^2) < 1$.

В дальнейшем применяется сокращенная запись

$$\kappa^2 z^2 \equiv v;\ (a)_\kappa = a(a+1)\dots(a+\kappa-1),\ (a)_0 = 1. \tag{1}$$

1. Относительно четных подходящих дробей следующей степенной функции [1]

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \dfrac{(0{,}5-n)_m}{(1-2n)_m}(-v)^m}{\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \dfrac{(0{,}5-n)_m}{(1-2n)_m}(-v)^m} + r_{2n}(v) =$$

$$= \frac{p_{2n}(v)}{q_{2n}(v)} + r_{2n}(v),\ n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

докажем теорему.

Теорема. Четная подходящая дробь (2) представляется следующей суммой элементарных дробей:

$$\frac{p_{2n}(v)}{q_{2n}(v)} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{1 - v\sin^2\dfrac{2m\pi-\pi}{4n}};\ n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Доказательство. Известно [2], что знаменатели подходящих дробей (2) имеют связь с полиномами Чебышева первого рода, а именно:

$$q_{2n}(v) = T_n(1-2{:}v) = \cos[n\arccos(1-2{:}v)]. \tag{4}$$

Согласно равенству (4) нетрудно вычислить, что

$$q_{2n}(v) = \prod_{m=1}^{n}\left(1 - v\sin^2\frac{2m\pi-\pi}{4n}\right),\ n = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Для доказательства тождества (3) пусть

$$\beta_m = -\sin^2\frac{2m\pi-\pi}{4n},$$

тогда предположим, что

$$\frac{1:n}{1+v\beta_1}+\ldots+\frac{1:n}{1+v\beta_n}=\frac{p_{2n}(v)}{q_{2n}(v)}. \tag{6}$$

Первый коэффициент числителя $p_{2n}(v)$ равен единице, а также сумма n слагаемых, каждое из которых равно $1:n$, равна единице. Ввиду равенств (2) и (6) относительно корней многочлена $q_{2n}(v)$ справедливы равенства

$$-C_n^1\frac{0{,}5-n}{1-2n}=\beta_1+\ldots+\beta_n;\ C_n^m(-1)^m\frac{(0{,}5-n)_m}{(1-2n)_m}=$$

$$=\beta_1\ldots\beta_m+\ldots+\beta_{n-m+1}\ldots\beta_n;\ m=2,\ldots,\ n-1. \tag{7}$$

На основании равенств (7) вычислим коэффициенты при v^m для числителя $p_{2n}(v)$, при этом в левой части равенства имеем nC_{n-1}^m слагаемых, получим

$$\frac{1}{n}(\beta_2\ldots\beta_{m-1}+\ldots+\beta_{n-m+1}\ldots\beta_n)+\ldots+\frac{1}{n}(\beta_1\ldots\beta_n+\ldots+\beta_{n-m}\ldots\beta_{n-1})=$$

$$=C_{n-1}^m(-1)^m\frac{(0{,}5-n)_m}{(1-2n)_m};$$

$$m=1,\ldots,\ n-1.$$

На основании последнего равенства и равенства (2) теорема доказана. Ввиду равенств (2) и (3) имеем

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1-v\sin^2\frac{2m\pi-\pi}{4n}}+r_{2n}(v). \tag{8}$$

2. Эллептические интегралы первого, второго и третьего рода ([3], стр. 82) ($z=\sin\varphi$, $h=n$, $\kappa^2<1$) после замены множителя $(1-v)^{-\frac{1}{2}}$ подынтегральных выражений элементарными дробями (8) и вычисления полученной суммы интегралов равны следующим суммам арктангенсов и остаточных членов:

$$F(\varphi,\kappa)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\kappa}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha_m\operatorname{tg}\varphi)}{\alpha_m}+\rho_{2n}(v);$$

$$\kappa^2<1,\ n=1,2,\ldots \tag{9}$$

$$E(\varphi,\kappa)=2n\varphi-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m}\operatorname{arctg}(\alpha_m\operatorname{tg}\varphi)\times$$

$$\times\operatorname{ctg}^2\frac{2m\pi-\pi}{4n}+R_{2n}(v);\ n=1,2,\ldots \tag{10}$$

$$\prod(\varphi,h,\kappa)=\frac{p_{2n}(-\kappa^2:h)}{q_{2n}(-\kappa^2:h)}\cdot\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+h}\operatorname{tg}\varphi)}{\sqrt{1+h}}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(1-\alpha_m)^2\operatorname{arctg}(\alpha_m\operatorname{tg}\varphi)}{(h+1-\alpha_m^2)\alpha_m}+\sigma_{2n}(v);\ h<-\kappa^2, \tag{11}$$

где

$$
\begin{cases}
\alpha_m^2 = 1 - \kappa^2 \sin^2 \dfrac{2\pi m - \pi}{4n}, \quad \rho_{2n}(v) = \displaystyle\int_0^z \dfrac{r_{2n}(v)\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \\
R_{2n}(v) = \displaystyle\int_0^z \dfrac{(1 - v)\, r_{2n}(v)\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \sigma_{2n}(v) = \displaystyle\int_0^z \dfrac{r_{2n}(v)\,dz}{(1 + hz^2)\sqrt{1 - z^2}}.
\end{cases} \tag{12}
$$

Если для эллиптических интегралов заменить множитель $(1-u)^{-\frac{1}{2}}$ подынтегральных выражений элементарными дробями (8), и вычислить полученную сумму интегралов, то эллиптические интегралы представляются в виде следующих сумм логарифмической функции и остаточных членов:

$$
\begin{cases}
F(\varphi, \kappa) = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{\beta_m}\, ln\, \dfrac{1 + \beta_m \sin\varphi}{1 - \beta_m \sin\varphi} + \rho_{2n+1}(u), \\
\qquad n = 1, 2, \ldots;
\end{cases} \tag{13}
$$

$$
\begin{cases}
E(\varphi, \kappa) = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1 - \kappa^2}{\beta_m^3} \cdot \sin^2 \dfrac{2\pi m - \pi}{n} \cdot ln\, \dfrac{1 + \beta_m \sin\varphi}{1 - \beta_m \sin\varphi} + \\
+ \dfrac{p_{2n}(1 - \kappa^{-2})}{q_{2n}(1 - \kappa^{-2})} \sin\varphi + R_{2n+1}(u), \quad n = 1, 2, \ldots;
\end{cases} \tag{14}
$$

$$
\begin{cases}
\prod(\varphi, h, \kappa) = \dfrac{\sqrt{h}}{\kappa^2 + h} \cdot \dfrac{p_{2n}(x_1)}{q_{2n}(x_1)} \operatorname{arctg}(\sqrt{h} \sin\varphi) + \\
+ \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \dfrac{\beta_m}{\beta_m^2 + h}\, ln\, \dfrac{1 + \beta_m \sin\varphi}{1 - \beta_m \sin\varphi} + \sigma_{2n+1}(u), \\
h \geqslant 0, \ x_1 = (\kappa^2 - 1) : (\kappa^2 + h), \ n = 1, 2, \ldots;
\end{cases} \tag{15}
$$

где

$$
\begin{cases}
u = \dfrac{(1 - \kappa^2) z^2}{1 - \kappa^2 z^2}, \quad \beta_m^2 = \kappa^2 + (1 - \kappa^2) \sin^2 \dfrac{2\pi m - \pi}{4n}, \\
\rho_{2n+1}(u) = \displaystyle\int_0^z \dfrac{r_{2n}(u)\,dz}{1 - v}, \quad R_{2n+1}(u) = \displaystyle\int_0^z r_{2n}(u)\,dz, \\
\sigma_{2n+1}(u) = \displaystyle\int_0^z \dfrac{r_{2n}(u)\,dz}{(1 + hz^2)(1 - v)}.
\end{cases} \tag{16}
$$

3. Докажем теорему о неравенстве модулей многочленов.

Теорема. Если корни многочлена $Q_{2\kappa+2}(z)$ разделяются корнями многочлена $Q_{2\kappa}(z)$, т. е.

$$
\begin{cases}
Q_{2\kappa}(z) = (z + \beta_1) \ldots (z + \beta_\kappa), \\
Q_{2\kappa+2}(z) = (z + \alpha_1) \ldots (z + \alpha_{\kappa+1}), \\
\beta_0 = \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_\kappa > \beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+1} > 0,
\end{cases} \tag{17}
$$

то для модулей этих многочленов имеет место неравенство

$$
\begin{cases}
|Q_{2\kappa+2}(z)| \geqslant |Q_{2\kappa}(z)|\, |z + \alpha|, \quad \kappa = 1, 2, \ldots; \\
\text{где } Re z \geqslant 0, \ \alpha_1 \ldots \alpha_{\kappa+1} = \beta_1 \ldots \beta_\kappa \alpha; \ \alpha_1 > \alpha > \alpha_{\kappa+1}.
\end{cases} \tag{18}
$$

Доказательство. Непосредственным вычислением убеждаемся, что неравенство (18) справедливо в случае $\kappa = 1$.

Пусть $\beta_{l-1} > \alpha > \beta_l$, $l = 1,\ldots, \kappa + 1$, тогда на основании неравенств (17) и (18) при $\kappa = 1$ и равенств (17) и (18) получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} |z+\alpha_1||z+\alpha_2| \geqslant |z+\beta_1|\left|z+\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}\right|, \\ \qquad \left(\alpha_1 > \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1} > \alpha_2\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|z+\dfrac{\beta_l\ldots\beta_\kappa}{\alpha_{l+2}\ldots\alpha_{\kappa+1}}\right| |z+\alpha_{l+2}| \geqslant |z+\beta_l|\left|z+\dfrac{\beta_{l+1}\ldots\beta_\kappa}{\alpha_{l+3}\ldots\alpha_{\kappa+1}}\right|, \\ \left(\dfrac{\beta_l\ldots\beta_\kappa}{\alpha_{l+2}\ldots\alpha_{\kappa+1}} > \dfrac{\beta_{l+1}\ldots\beta_\kappa}{\alpha_{l+3}\ldots\alpha_{\kappa+1}} > \beta_{l+1}\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|z+\dfrac{\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}\right| |z+\alpha_{\kappa+1}| \geqslant |z+\beta_{\kappa-1}||z+\beta_\kappa|, \\ \qquad \left(\dfrac{\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}} > \beta_{\kappa-1} > \beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1}\right). \end{cases} \tag{19}$$

Перемножая левые и правые части неравенств (19) и сокращая обе части полученного неравенства на равные множители, мы получим необходимое неравенство (18), что и требовалось доказать.

4. На основании формулы ([1], стр. 23 (11) получим:

$$q_{2n}(v) = (0{,}5-n)_n] : [(1-2n)_n] \times$$
$$\times F(-n,\ 0{,}5-n;\ 0{,}5;\ 1-v) = \frac{(0{,}5-n)_n}{(1-2n)_n} Q_{2n}(v). \tag{20}$$

Ввиду ([4], стр. 28, 34), неравенства (18) и равенства (20) преобразуем остаточный член $|r_{2n}(v)|$:

$$|r_{2n}(v)| =$$
$$= \left|\sum_{\kappa=n}^{\infty} \frac{2v^{2\kappa}}{\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(0{,}5-\kappa)_m}{(0{,}5)_m}(v-1)^m\right]\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^m \dfrac{(-0{,}5-\kappa)_m}{(0{,}5)_m}(v-1)^m\right]}\right| <$$
$$< \frac{2|v|^{2n}}{|Q_{2n}(v)\,Q_{2n+2}(v)|}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{|v|^{2\kappa}}{|2-v|^{2\kappa}},$$

т. е.

$$|r_{2n}(v)| < \frac{|v|^{2n}|2-v|}{|Q_{2n}(v)|^2(|2-v|-|v|)} = f(v),\ Rev < 1. \tag{21}$$

Ввиду неравенства (21) и равенств (12) и (16), окончательно получим:

$$\begin{cases} |\sigma_{2n}(v)| \leqslant |\rho_{2n}(v)| < f(v)\,\delta(z), \\ |\sigma_{2n+1}(u)| \leqslant |\rho_{2n+1}(u)| < f(u)\,\Theta(z), \end{cases} \quad Re(hz^2) \geqslant 0; \tag{22}$$

$$\begin{cases} |R_{2n}(v)| < f(v)(1+|v|)\,\delta(z), \\ |R_{2n+1}(u)| < f(u)\,|z|; \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} |\sigma_{2n}(v)| < f(v)\,\delta(z)\,|1+hz^2|^{-1}, \\ |\sigma_{2n+1}(u)| < f(u)\,\Theta(z)\,|1+hz^2|^{-1}, \end{cases} \quad -1 < Re\,(hz^2) < 0. \tag{24}$$

Для оценок (22) — (24) множители $\delta(z)$ и $\Theta(z)$ следующие

$$\delta(z) = \begin{cases} \arcsin|z| & \text{для } |z| \leqslant 1, \\ \dfrac{|z|}{|\sin(\arg z)|} & \text{для } |z| > 1. \end{cases} \quad Re\,v < 1; \tag{25}$$

$$\Theta(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\kappa}\ln\dfrac{1+|\kappa z|}{1-|\kappa z|} & \text{для } |\kappa z| < 1, \\ \dfrac{|z|}{|\sin(\arg z)|} & \text{для } |\kappa z| > 1, \end{cases} \quad Re\,u < 1. \tag{26}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Система аппроксимаций Падэ для степенных функций. Изв. ТПИ, т. 154, стр. 20—23, Томск, 1967.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.