УДК 336.763

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ СТОИМОСТИ СВОПЦИОННОГО КОНТРАКТА В МОДЕЛИ ХАЛЛА-УАЙТА

О.А. Бельснер, Д.Н. Жабин

Томский политехнический университет
E-mail: belsner@bk.ru

Исследована неарбитражная модель временной структуры процентной ставки с непрерывным временем, представленная Халлом (Hull) и Уайтом (White) в 1990 г. Рассматривается возможность применения этой модели для свопциона, предлагается вывод аналитического выражения для его оценки. Модель является наиболее распространенной и часто используемой в настоящее время при оценивании стоимости финансовых инструментов, производных от процентных ставок. При выводе выражения для свопциона применялись методы финансовой математики и теории опционов. Для проверки адекватности полученных результатов производится апробация предложенного выражения стоимости цены свопционного контракта на основе рыночной информации, основные расчеты и калибровка выражения реализованы в пакете Mathematica.

В настоящее время в банковской практике все большее внимание уделяется таким производным финансовым инструментам как своп, представляющий собой обмен на некоторый срок парой активов между контрагентами. Внебиржевая природа свопов дает практически неограниченные возможности для формирования контрактов, устраивающих обе стороны. На сегодняшний день на мировых внебиржевых и биржевых рынках преобладают процентные инструменты, в частности процентные свопы и основанные на них опционные контракты (свопционы).

Определение цен опционов является одним из важнейших результатов научных исследований в области современной финансовой математики, так как цены динамично меняются во времени и принятие на себя обязательства продать или купить что-то в будущем по оговоренной цене связано с определенным уровнем риска для обеих сторон. Модели ценообразования, которые были разработаны для опционов (в частности модели, Блэка-Шоулза [1]), успешно используются финансистами и трейдерами для выявления равновесны цен производных финансовых инструментов.

Определение стоимости синтетических инструментов, к которым принадлежит и свопцион, является более сложной задачей в силу того, что необходимо учитывать свойства лежащего в основе инструмента, в данном случае, свопа. Являясь инструментом внебиржевого рынка, а, следовательно, обладая определенной гибкостью и способностью приспосабливаться к запросам сторон, участвующих в сделке, свопцион характеризуется отсутствием каких-либо стандартных условий, что осложняет процесс определения их равновесной цены.

Исследование данного вида финансовых деривативов и выявление его особенностей представляется актуальным в связи с широким распространением и ростом рынков операций «своп» как в зарубежных странах, так и в Российской Федерации (так, 26 сентября 2002 г. Банк России ввел в действие механизм рефинансирования кредитных организаций с использованием сделок «своп»).

Предположение о том, что процентные ставки являются постоянными или известными функциями от времени [2] верны лишь в случае краткосрочных контрактов, тогда как для долгосрочных необходимо более точное моделирование поведения процентной ставки. Нами рассматривается неарбитражная однофакторная модель процентной ставки, в основе которой лежит принцип моделирования поведения процентной ставки. Предположим, что лишь один параметр является случайным, так как невозможно реалистично спрогнозировать поведение ставки в некоторый момент времени в будущем, естественно сделать предположение о том, что она является случайной величиной. Ставка процента, поведение которой описывается при помощи модели, отражает доход по облигации с бесконечным сроком погашения [3].

Традиционные модели процентной ставки, используемые в финансовой математике, называются равновесными. Они используются для выявления соотношений между различными показателями в экономике, однако существенным недостатком является тот факт, что структура процентной ставки – конечный результат данных моделей. При оценке деривативов необходимо использовать модели, соответствующие рыночной структуре процентной ставки [2]. Неарбитражные модели, позволяющие прогнозировать эволюцию структуры процентной ставки на основе информации об ее предыдущем поведении, были разработаны именно с этой целью. Однофакторные модели процентной ставки позволяют оценить кривую дохода, основываясь на информации о процентной ставки и параметров выбранной модели. При использовании такого рода моделей необходимо определить критерии выбора параметров и степень доверия полученным результатам [2].

Выбор параметров, основанный на временных рядах, приводит к тому, что результат будеттеоретическим. В лучшем случае данная кривая совпадает с рыночной. Естественно, возникает вопрос: из каких предположений исходить при выборе параметров и что является более достоверным результатом: полученная теоретическая кривая или реальные рыночные цены? При выборе, однако, не следует забывать о том, что облигации и свопы являются высоколиквидным инструментами [4].

В работе основное внимание было уделено выражениям для оценки стоимости облигации и выражениям для оценивания стоимости опционного контракта.

В течение последних пятнадцати лет предпринималось большое количество попыток описать движение кривой дохода с использованием однофакторной модели. При этом используется традиционный подход, предполагающий существование модели краткосрочной процентной ставки, вывод кривой текущего дохода и вариантов ее изменения, при этом параметры модели максимально приближаются к реальным рыночным значениям [3]. Примерами такого подхода могут служить работы Дотана (Donathan) (1978 г.) [4], Кокса (Cox), Ингерсолла (Ingersoll) и Росса (Ross) (1985 г.) [4]. Исследователями были разработаны альтернативные подходы. Один из них был предложен Халлом и Уайтом (Hull/White) в 1990 г. [3, 4]. Ими рассматривались две однофакторные модели краткосрочной процентной ставки, которые могут быть применены как к волатильности дохода облигации, по которой процент уплачивается по истечении срока вместе с погашением основного долга, так и к структуре текущей процентной ставки. Нами рассматривается модель временной структуры процентной ставки. Следует отметить, что в исследуемой модели учитывается эффект возвращения к среднему (mean reversion): если процентная ставки отклоняется от некоторого своего среднего значения, то в дальнейшем проявляется тенденция возвращения этой ставки процента к среднему значению [4].

Считается, что цены активов изменяются случайным образом под воздействием так называемой эффективной рыночной гипотезы. Существует несколько различных формулировок данного предположения, однако в каждой из них выделяются два основных момента [2]:

1. Предшествующие события полностью отражаются на «сегодняшней» цене актива, что не несет дополнительной информации.
2. Рынки немедленно реагируют на появление любой информации об активах.

Таким образом, моделирование цен активов равнозначно моделированию новой информации, оказывающей воздействие на цену данного актива. Принимая во внимание предположения, сделанные выше, можно сделать вывод о том, что непредвиденные изменения цены актива схожи с марковским процессом [4].

При каждом изменении цены актива ожидается определенная прибыль, определяемая как частное от деления разности цен на первоначальное значение стоимости [3].

Модель Халла-Уайта является наиболее распространенной и часто используемой в настоящее время для оценки стоимости финансовых инструментов, производных от процентных ставок (будущее значение процентной ставки в коротком периоде имеет логарифмически нормальное распределение). Для оценки стоимости финансовых инструментов, производных от процентных ставок, используются модели временной структуры процентных ставок с непрерывным временем. Временная структура процентных ставок определяется доходностями облигаций с нулевыми купонами при различных сроках до погашения.

Цена облигации в момент времени t в модели Халла-Уайта оценивается из уравнения [4]:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}, \text{ где}$$

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a},$$

$$\ln A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - B(t,T)\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} -$$

$$-\frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})^2(e^{2at}-1),$$

где $P(t,T)$ – цена облигации, дата погашения которой наступает в момент времени T, $B(t,T)$ – стоимость (в момент времени t) облигации с нулевым купоном, погашаемой через (T–t) лет, $F(t,T)$ – номинал облигации.

Стохастическое дифференциальное уравнение для определения величины изменения процентной ставки облигации имеет вид [4]:

$$dr(t) = [\theta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dz(t),$$

где $\sigma(t,T)$ – волатильность $P(t)$, $r(t)$ – безрисковая процентная ставка в коротком периоде в момент времени t, $dz(t)$ – винеровский процесс.

Функция $\theta(t)$ выбирается таким образом, чтобы модель соответствовала начальной временной структуре (зависимость процентной ставки от срока действия финансового инструмента) [4].

Функции $a(t)$ и $\sigma(t)$ являются параметрами волатильности и выбираются, исходя из предположения о том, что они должны соответствовать рыночным ценам ряда активно торгуемых процентных опционов.

Цена в начальный момент времени опциона покупателя с датой окончания в момент времени T на бескупонную облигацию, срок погашения которой наступает в момент времени s, составляет [4]:

$$c_b = LP(0,s)N(h) - XP(0,T)N(h-\sigma_P),$$

где L – номинал облигации, X – цена исполнения, σ_p – стандартное отклонение логарифма цены облигации в момент времени T,

$$h = \frac{1}{\sigma_p}\ln\frac{LP(0,s)}{P(0,T)X} + \frac{\sigma_p}{2},$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(s-T)})\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}.$$

Цена опциона продавца на облигацию составляет [4]:

$$p_b = XP(0,T)N(-h+\sigma_p) - LP(0,s)N(-h),$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p}\ln\frac{LP(0,s)}{P(0,T)X} + \frac{\sigma_p}{2}, \quad N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Данные формулы эквивалентны выражениям модели Блэка-Шоулза [1] для оценки стоимости опционного контракта.

Рассмотрим, как модель Халла-Уайта может быть использована при оценки опционов на облигации.

Напомним, что опционный контракт дает право, но не обязывает купить или продать базовый инструмент по некоторой цене – цене исполнения в определенную будущую дату (дату истечения срока) или до ее наступления. Опцион на облигацию – опцион на покупку или продажу определенной облигации по определенной цене в определенную дату в будущем. Кроме покупки и продажи на внебиржевом рынке, опционы на облигации часто могут быть встроены в облигации при их эмиссии, что делает выпускаемые облигации более привлекательными как для эмитента, так и для потенциального покупателя [4].

Перейдем к выводу аналитического выражения для свопциона в модели Халла-Уайта. Напомним, что под свопционом понимается опцион на заключение процентного своп-соглашения в определенный момент времени в будущем при определенной фиксированной ставке [5]. Процентный своп может быть представлен в виде обмена облигаций с фиксированной процентной ставкой на облигацию с плавающей ставкой процента (цена такой облигации будет равна ее номиналу в начальный момент времени при заключении своп соглашения) [2].

Таким образом, свопцион может быть представлен в виде опциона на облигацию с фиксированной процентной ставкой и ценой исполнения равной номиналу (то есть бескупонной облигации). Стоимость свопциона сроком n лет, в таком случае, составит [4]:

$$Sw = \sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}P(0,t_i)(F_0N(d1) - R_XN(d2)),$$

$$d1 = \frac{\ln(F_0/R_X) + \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d2 = \frac{\ln(F_0/R_X) - \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$F_i = E(R(t)), \quad t \in [T, T+n],$$

где L – номинал, m – частота начисления процентов (в год), F_0 – форвардная ставка свопа, $P(0,t_i)$ – бескупонная облигация со сроком погашения в момент времени $t_i=T+i/m$, $i=(1,\dots,mn)$, T – срок погашения свопа, R_X – фиксированная ставка процента.

Значение F_0 может быть найдено из уравнения [4]:

$$\frac{1}{m}F_0 = \frac{1-P(T,s)}{\sum_{i=1}^{mn}P\left(T, T+\frac{i}{m}\right)},$$

здесь $s=t+n$ – время до окончания своп-соглашения.

Так как свопцион, наделяющий владельца правом осуществлять платежи по плавающей процентной ставке, является опционом продавца на облигацию с фиксированной ставкой, цена исполнения которого равна плавающей ставке, можем получить выражение для свопциона в модели Халла-Уайта.

Запишем выражение для выплат по опциону продавца на своп, выплаты по которому производятся в момент времени $T+1/m$, на момент времени T. Предположим, что $\delta=1/m$ – временной интервал между начислениями процентов, тогда выражение для выплат можем записать в виде:

$$P_S = \frac{L\delta}{(1+R\delta)}\max(R-R_X, 0),$$

После несложных преобразований перейдем к записи:

$$P_S = \max\left[L - \frac{L(1+\delta R_X)}{1+R\delta}, 0\right], \qquad (1)$$

$\frac{L(1+R_X\delta)}{1+R\delta}$ – стоимость в момент времени T бескупонной облигации с доходом $L(1+R_X\delta)$ в момент времени $T+\delta$. Таким образом, выражение (1) характеризует доход на момент времени T по опциону «пут» на своп, выплаты по которому производятся в момент времени $T+1/m$, а цена исполнения равна L.

Таким образом, представив свопцион как портфель опционов на бескупонные облигации, запишем выражение для свопциона Sw в модели Халла-Уайта:

$$Sw = L\sum_{i=1}^{mn}P(0,t_{i+1})N(-h+\sigma_P) -$$

$$-P(0,t_i)(1+\delta R_X)N(-h), \quad t_i = T + \frac{i}{m}, \qquad (2)$$

$$h = \frac{1}{\delta_P}\ln\frac{(1+\delta R_X)P(0,t_i)}{P(0,t_{i-1})} + \frac{\delta_P}{2},$$

$$\delta_P = \frac{\delta}{a}(1-e^{-a\delta})\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}, \quad N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Вследствие необходимой корректной оценки стоимости инструмента необходимо определение параметров a и σ, т.е. проведение калибровки модели (определение параметров модели) [4].

В представленной работе производилась калибровка модели к кэплету, далее рассчитывалась стоимость свопционного контракта, производилось сравнение с рыночной, и был сделан вывод о состоятельности формулы. При проведении калибровки модели использовалась информация о кэплетах на ставку LIBOR (London Interbank Offered Rate, ставку процента, по которому большинство крупных международных банков финансируют свою деятельность) за 2002 г. Ставка исполнения составляет 4,96 %.

Напомним, что контракт, определяющий верхнее граничное значение процентной ставки, называется кэпом. Кэп состоит из серии кэплетов, представляющих собой контракты со сроками погашения платежа в момент времени $T+\tau$ на выплату разницы между рыночным значением ставки R_T в момент времени T и значением ставки X в течение периода τ, основная сумма при этом составляет L. Главным условием является то, что данная разность должна быть положительна, то есть стоимость (*payoff*) кэплета в момент $T+\tau$ составляет [2]:

$$\max L[(R_T-X),0].$$

На практике калибровка модели Халла-Уайта осуществляется путем выбора значений параметров, характеризующих поведение процентной ставки и волатильности таким образом, чтобы они соответствовали рыночным ценам опционов. Эмпирические значения параметра a принадлежат интервалу [0, 0,1], значение же параметра σ принадлежат интервалу [0,01, 0,03] [5]. При калибровке начальные значения параметров a и σ принимались равными 0,1 и 0,01 соответственно.

Параметры определяются при помощи метода наименьших квадратов таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений цен, полученных по модели Халла-Уайта, и рыночных цен опционов, была минимальной. В работе при выводе выражения применяли методы финансовой математики и теории опционов. Для проверки адекватности полученных результатов использовалась рыночная информация, основные расчеты и калибровка выражения были произведены с использованием пакета Mathematica.

В результате калибровки модели были получены следующие значения параметров: $\{a\to 0,108114, \sigma\to 0,0112018\}$. Зная параметры модели, можно рассчитать цену свопциона, дающего держателю право осуществлять платежи при ставке процента 6,2 % согласно условиям 3-летнего свопа, действие которого начинается через 5 лет. Волатильность процентной ставки свопа составляет 20 %. Платежи осуществляются раз в полугодие, основная сумма долга составляет 100 USD.

Применив (2), получим значение стоимости свопционного контракта – 2,0035. Рыночная стоимость данного свопционного контракта составляет 2,0038 (данные предоставлены компанией «Эконофизика-Томск»). Таким образом, полученное выражение позволяет оценить стоимость свопционного контракта, при этом отклонение модельной цены от соответствующей рыночной не превышает 1 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and Corporate Liabilities // Journal of political economy. – 1973. – № 6. – P. 637–659.
2. Wilmott P. Derivatives: the theory and practice of financial engineering. – N.Y.: John Willey & Sons, 2000. – 742 p.
3. Hull J., White A. One-factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities // The Journal of Financial and Quantitative analysis. – 1993. – № 2. – P. 235–240.
4. Hull J. Options, futures and other derivatives. – Toronto: University of Toronto, 2002. – 680 p.
5. Marshall J.F., Kapner K.P. Understanding swap finance. – OH: South-Western, 1990. – 250 p.
6. Keith R. An introduction to derivatives. – N.Y.: John Willey & Sons, 2000. – 198 p.

УДК 533.6.011

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИВЕРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В.М. Галкин

Томский политехнический университет
E-mail: vlg@tpu.ru

Предлагается итерационный метод решения дифференциальных уравнений, имеющих дивергентный вид и описывающих одномерное стационарное течение с переходом через скорость звука. Метод основан на использовании априорной информации о монотонном возрастании числа Маха вдоль сопла. Сравнение с другими методами проводилось на точном решении, а также при расчете двухфазного течения.

Введение

В [1] был предложен и далее в [2] уточнен итерационный метод решения одномерных стационарных уравнений газовой динамики, который за счет использования априорной информации о монотонном изменении числа Маха внутри рассматриваемой области по скорости сходимости на порядок превосходит метод установления на основе схемы Маккормака [3] и имеет простой алгоритм. В